目 次

1　関数とは

数学を学ぶ上で大切なことはもちろんたくさんあります。因数分解の方法や、平方完成、四則演算やらなにやら…こんな簡単な話ではなく、もちろん難しいレベルの内容においてもたくさんの大切なことがあります。しかし、高校数学でまず理解しなければならないもっとも大切なものは関数です。

$y = f(x)$ が何を表しているのかがわからないと、決して数学がわかるようにはなりません。逆に $y = f(x)$ がわかるようになると、今まで適当に理解していたものが急にはっきりと違う世界を見せてくれるようになります。もちろん理解するためには何度も何度もこれから書くことをしっかりと読まなくてはならないかもしれません。しかし、あきらめなければ、きっと役に立つすばらしい武器を得ることが出来ますよ。頑張ってください。

1.1　関数の定義

関数の定義ってちゃんと言えますか？むしろ何故これがわからない状態で問題を解こうとしているのかが疑問なんですが、それに関しては学校の先生方の授業の進め方に問題があると思いますので、ここでは言及しません。

では改めて、関数の定義を考えてみましょう。関数は

$$y = f(x) \tag{1}$$

と表されるものです。そんなことはもちろん知っていますよね。ではこの意味は何ですか？

ゴニョゴニョ言ってしまう人も多いのではないでしょうか？式 (1) は、「y は x の関数」という意味になります。でもこれだけではわからないですよね？だから、もう少し説明すると「1 つの x が決まると 1 つの y が決まるもの」の集合ということになります。

まだよくイメージがつかめないでしょうね。そこでこういうのはどうでしょう？よく小学校の先生がブラックボックスなるものを持ち出すアレです。（うちの弟は、担任の先生から習ってたんですが、私は習ったことがありません。）

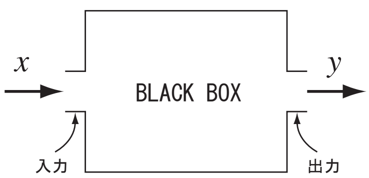

図 1: ブラックボックス

真ん中に大きな箱があります。その中身はわかりません。何たってブラックボックスですから…。そこでそのブラックボックスの中に x を投げ入れてみます。すると y が出てきました。何が出てくるかは、ブラックボックスの機能に依ります。

たとえば、x が「たまご」でブラックボックスの機能が「ゆでる」だった場合、出てきた y は「ゆでたまご」になります。もう一つ考えておきますか？x を「乾燥したうどん」にしてブラックボックスに入れると y は「食べごろのうどん」となります。

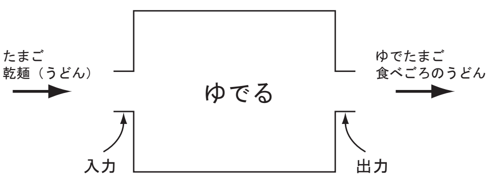

図 2: ブラックボックスの例

では、もういちど関数を見てみましょう。$y = f(x)$ です。これは入力が x、ブラックボックスのところが $f(\ )$、そして出力が y になります。

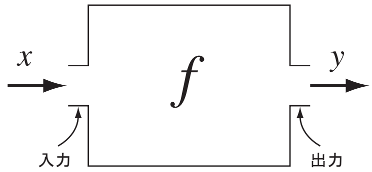

図 3: 関数のブラックボックス化

$f(\ )$ の ( ) は入力を入れる入口になります。その機能が f で表されますので、$f(\ )$ になります。さて、そのブラックボックス $f(\ )$ に値 x を代入します。$f(x)$ になりました。そうすると、出てくる値は y ですね。では $f(x)$ の出力を y と表してあげましょう。$y = f(x)$ となります。

つまり x に 3 を入れたときの式は $f(3)$ と表されますし、その結果値が 5 と出るのであれば、$5 = f(3)$ となります。べつに $f(3) = 5$ でも同じことですよ？

では、このように書いてあれば、どういう意味を持っているのでしょうか？

$$-7 = f(1) \tag{2}$$

式 (2) は $y = f(x)$ において、x に 1 を代入したとき出てくる値が -7 になるという意味です。

どうですか？ちゃんと関数がイメージ出来たでしょうか？次はもう少し詳しく説明しましょうね。

1.2 関数で表されるグラフ

今度は数学のイメージの世界に関連付けましょう。関数の定義は覚えてますか？「**1 つの x が決まると 1 つの y が決まるもの**」でしたよね？それをブラックボックス風に言うと「**1 つの入力 x を入れると 1 つだけ出力 y が得られるもの**」ということになります。

逆に言うと「**1 つの入力 x を入れたとき出力 y が 1 つだけではないもの**」は関数とは言えません。$y = f(x)$ とは表せないわけです。

例を挙げましょう。入力が「たまご」だったとします。ブラックボックスの機能が「ゆでる」ではなく「料理」だった場合、出力は「ゆでたまご」や「目玉焼き」や「スクランブルエッグ」だったりします。つまり「たまご」の入力に対して、出力が 1 つに絞れませんので、これを関数の形 $y = f(x)$ で表すことはできません。

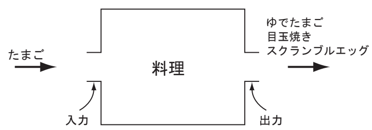

図 4: 関数では表せない

つまりもう一度説明しますが、「**1 つの入力 x を入れたとき出力 y が 1 つだけではないもの**」は関数 $y = f(x)$ とは表せないわけです。

しつこいですが、もう一度だけ確認しておきます。結局 $y = f(x)$ と表せる x と y の関係は、「**1 つの入力 x に対して、1 つだけしか出力 y が得られないもの**」です。言い方は変えましたが、言っていることはずっと同じです。中途半端に理解せず「完璧にわかった！」と言えるまで、関数の定義から繰り返しここまでを

読んでください。

では、次に示す $x-y$ グラフを見てください。それぞれ実線で表されているグラフは $y=f(x)$ と表せるでしょうか？簡単に答えを見ずに、まずは関数の定義を考えて $y=f(x)$ と表せるかどうかを考察してください。もちろん根拠も忘れずに！

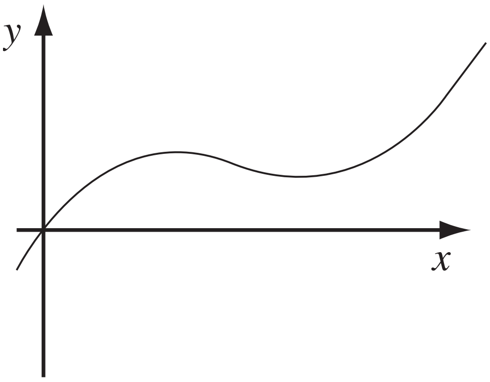

図 5: 関数なのかな？

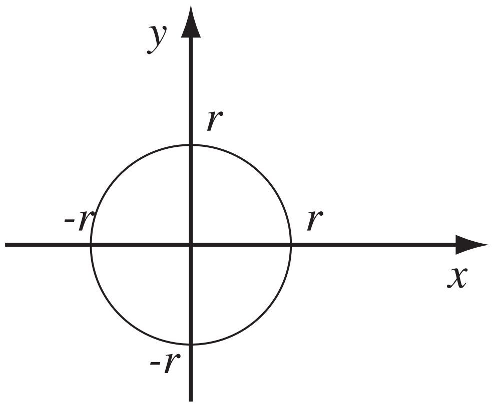

図 6: 関数なのかな？

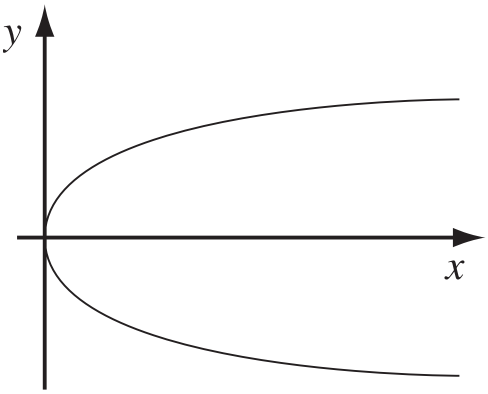

図 7: 関数なのかな？

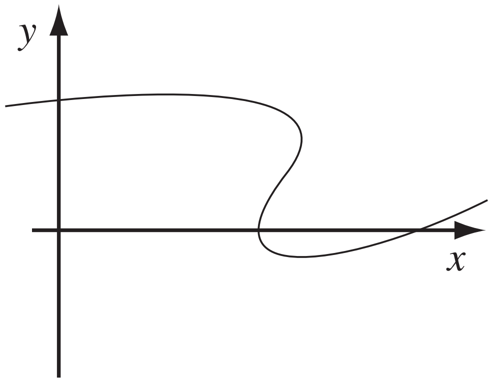

図 8: 関数なのかな？

どうだったでしょうか？ちゃんと判断できましたか？では考えていきましょう。関数 $y=f(x)$ と表せる意味は「**1 つの入力 x を入れると 1 つだけ出力 y が得られるもの**」でしたね。では、このことはグラフ上ではどのように確認すれば良いのでしょうか？図 9 を見てください。

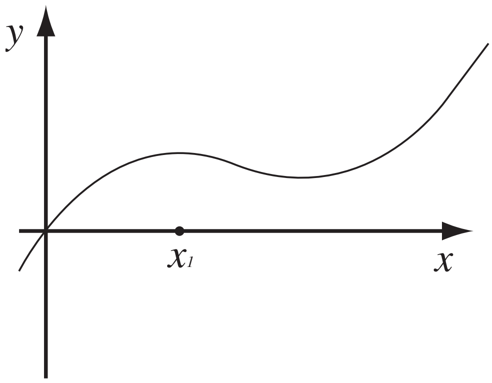

図 9: 適当に x_1 を決める

とりあえず適当に x の値の 1 つである x_1 に注目してみました。この x_1 に対してグラフの実線はどんな値を示すのか考えてみましょう。

ではグラフ上で $x = x_1$ であるのは図 10 の点線ですよね？（これは $x = x_1$ の直線とグラフの交点を調べる作業です。）

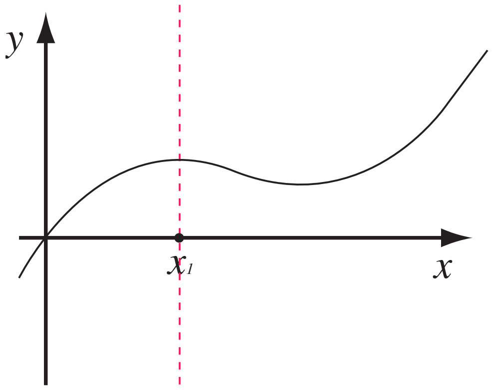

図 10: グラフ上で $x = x_1$ が示す直線

実線上で $x = x_1$ となる点が図 11 のように決まりました。

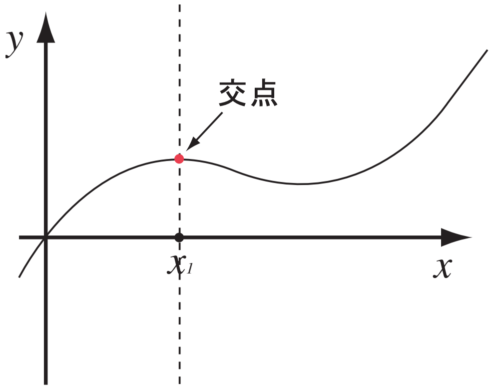

図 11: 交点が見つかる

交点が見つかりました。この点が実線において $x = x_1$ で決まる値（点）です。ではこの交点の y 座標はどのように決まるでしょうか？図 12 を見てください。

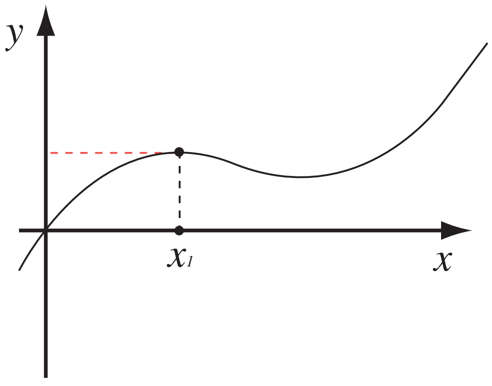

図 12: y 軸へ直線を伸ばす

y 軸へ向かって直線を伸ばせば y 座標は求まりますね。

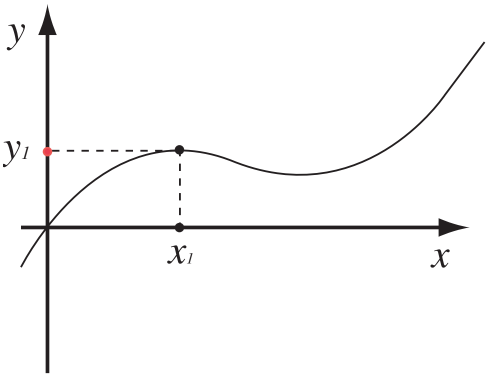

図 13: y 座標決定！

y 座標が図 13 のように y_1 に決まりました。

ここまでに行ったことがわかりましたか？これは 1 つの入力 x_1 を決めると、1 つの出力 y_1 が決まるということを確認する作業になります。この図 13 上の任意の x について同様に調べてもすべて 1 つの y しか決まりませんね。ですから、図 5 のグラフは $y = f(x)$ と表せるグラフ、つまり y は x の関数であるということが出来るわけです。

では他の図 6、図 7、図 8 はどうでしょう？

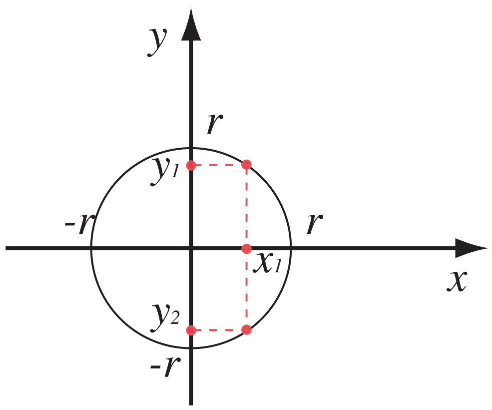

図 14: 1 つの x で 2 つの y

図 14 を見てください。x を適当に x_1 と決めてみると、その x_1 に対応する実線上の点は 2 つありますね。ということは当然 2 つの y が y_1 と y_2 という形で決まってしまうわけです。ですから、これは関数の定義から外れますね。ということで、このグラフは $y = f(x)$ で表すことはできません。（上下に 2 分割すると表すことは出来ますが、ここで言っているのは 1 つの関数で図 14 のグラフを表すことは出来ないということです。）

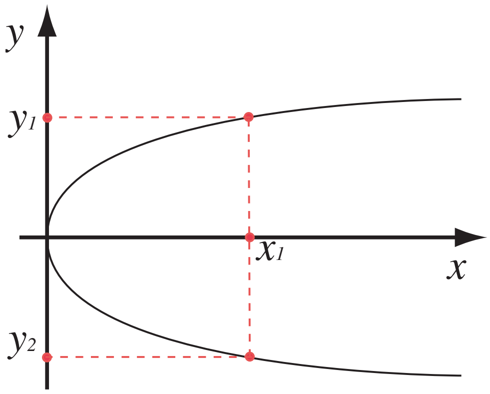

図 15: 1 つの x で 2 つの y

図 15 を見てみましょう。これも図 14 と同様に 1 つの x に対応する実線上の点が 2 つ存在しますね。したがって、これも $y = f(x)$ の形で表すことはできません。

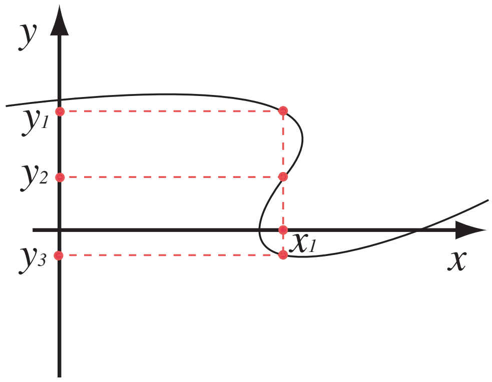

図 16: 1 つの x で 3 つの y

図 16 はどうでしょうか。部分的には良さそうなんですが、図 16 で示す辺りが 1 つの x に対して、交点が 3 つも存在しています。したがって、これも関数で表すことは出来ませんね。

どうでしょうか？この辺りまで進むとだんだん関数というイメージが出来てきたでしょうか？これからもっともっと深く理解していきます。今までのところをしっかりと復習しておいてくださいね。

1.3 $f(\ )$ が示すもの

皆さんは $f(\ )$ が何を意味するかを考えたことがあるでしょうか？「関数？」「意味はない」など色々な考えがあると思います。実際 $f(\ )$ だけだと概念的に関数を表すだけで意味を成さないかもしれませんが、私はこれに意味（イメージ）を与えます。もし、このイメージが皆さんにとって不快でない場合は、是非このイメージを私と共有してください。では、私の $f(\ )$ のイメージをご覧ください。

まず、これからずっと概念でお話をすると、きっとチンプンカンプンになってしまうでしょうから、とりあえず関数の例を 1 つ挙げて、それを用いてイメージを作り上げましょう。

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{3}$$

最初に式 (3) が語っていることを理解しましょう。

- y は x の関数である。（$y = f(x)$ より）
- $f(x)$ は $x^2 - 2x + 1$ と表される。（$f(x) = x^2 - 2x + 1$ より）

y が x の関数であるということの意味は大丈夫ですよね？今まで散々やってきましたから。「1 つの x に対して 1 つの y が対応する」です。（説明の仕方を毎回変えているのは、ちゃんとした概念を 1 つ理解しておけば、あとはその形を多少変えられてもちゃんと同じことだと認識できるからです。またそうなって欲しいからです。）次に今回は関数 $f(x)$ の具体的な例が挙げられてますので、$f(x)$ は $x^2 - 2x + 1$ であるということができます。

では、この式 (3) で表されるグラフを描いてみましょう。描くためには平方完成しなくてはなりませんね。

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

平方完成は出来ますよね？とりあえずここではそこには言及しません。さて、頂点が (1, 0) だと分かりましたので、グラフを描いてみましょう。図 17 をご覧ください。

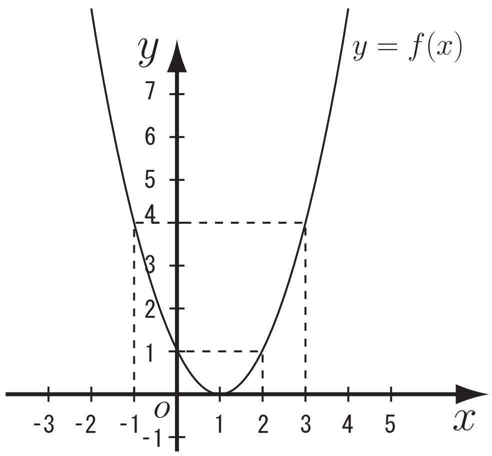

図 17: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフ

$x = 1$ のとき頂点、$x = 0$、2 のとき $y = 1$、$x = -1$、3 のとき $y = 4$ となるグラフとなります。

さて、準備が整いました。

- y は $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ と表される。この y は x の関数である。
- $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ は図 17 のようなグラフとなる。

以上のことをしっかりと頭に置いておいてください。では、次に以下の式 (5) をグラフにしてみましょう。

$$y = f(a) = a^2 - 2a + 1 \tag{5}$$
$$= (a-1)^2 \tag{6}$$

式 (5) は平方完成すると式 (6) のようになるのは当然ですね。

ここで $f(p) = p^2 - 2p + 1$、（p は変数）と表されて、さきほどの $f(x)$ と形は同じであることに注意してください。（$f(x)$ はもちろんどんな式でも表します。$f(x) = x + 3$ でも、$f(x) = x^3 + 2x + 5$ でももちろん表せます。しかし、1 つの問題において一度 $f(x)$ と言われたら、その問題が終了するまではずっと同じ式を表します。ですから、この話が終わるまではずっと $f(x)$ は $f(x) = x^2 - 2x + 1$ だということです。別の式を表したい場合は $g(x)$ や $h(x)$ と表します。）

ですから $y = f(a)$ のグラフは

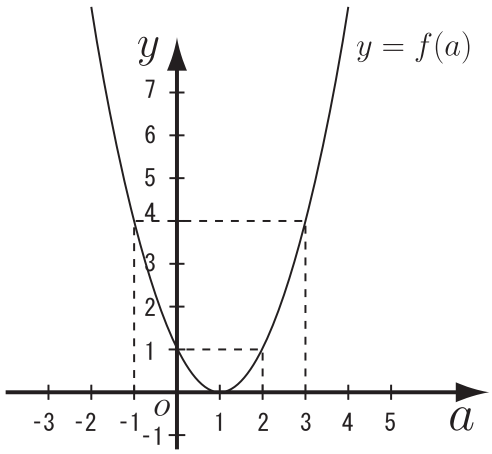

図 18: $y = f(a) = a^2 - 2a + 1$ のグラフ

となります。アレ？偶然 x が a に変わっただけで、あとは図 18 は図 17 とまったく同じですね。では確認しておきましょう。

- y は $y = f(a) = a^2 - 2a + 1$ と表される。この y は a の関数である。
- $y = f(a) = a^2 - 2a + 1$ は図 18 のようなグラフとなる。

では次の式 (7) はどうでしょう？

$$y = f(b) = b^2 - 2b + 1 \tag{7}$$
$$= (b - 1)^2 \tag{8}$$

式 (7) は平方完成されて式 (8) のようになります。もちろん式 (7) の意味は「y は b の関数である。」ですし、その意味の表すところは「1 つの b には 1 つだけの y が対応する。」ですよね。では、この $y = f(b)$ のグラフを描いてみましょう。図 19 をご覧ください。

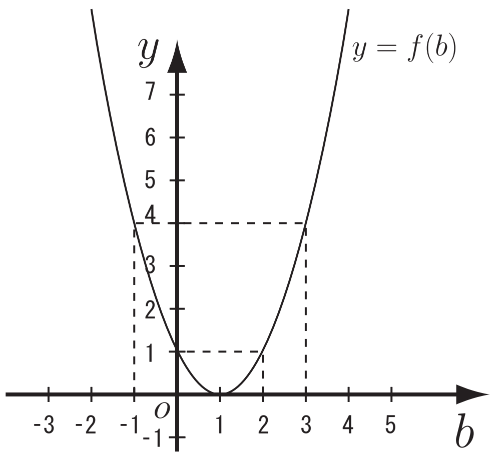

図 19: $y = f(b) = b^2 - 2b + 1$ のグラフ

アレレ?今回もたまたま…とかわざと言う必要もありませんね。もうお気づきだと思います。$f(x)$ が $f(x) = x^2 - 2x + 1$ と表されている限り、その変数が x から a に変わろうが、b に変わろうがグラフの形は全て同じになるということです。もちろん軸は x 軸から a 軸や b 軸には変えましたよ?

では以上のことからわかることがあります。つまり、グラフの形は $f(\ )$ が決めているということです。(まぁこれは私が勝手にイメージしているだけなので、$f(\ )$ は何も意味しないとおっしゃる方がいらっしゃれば、それはそれで結構です。私は 1 問題に限り $f(\ )$ で表される式は 1 意に限定されるという条件のもとでこのように言っています。)

正確には $f($変数$)$ なんでしょうが、変数は別に x でも a でも b でもいいことを考えると、初学者に分かってもらうには $f(\bigcirc) = \bigcirc^2 - 2\bigcirc + 1$ という○には何を入れても良くて、$f(\bigcirc)$ はその式の形を決めている器のようなものだと言った方がいいでしょうか。その器がグラフの形を決めているのです。

さきほどの例でもう一度説明しますと、最初に $f(x) = x^2 - 2x + 1$ と決められたら、その問題中ずっとその $f(\bigcirc)$ は $f(\bigcirc) = \bigcirc^2 - 2\bigcirc + 1$ という形に決められますから、つまり $f(a)$ も $f(a) = a^2 - 2a + 1$ という形になりますし、$f(b)$ も $f(b) = b^2 - 2b + 1$ という形になります。式の形は f( ) が決めていますから、$f(x)$ も $f(a)$ も $f(b)$ も、それぞれ変数軸は違いますが、グラフの形は同じものとなります。

この話はここで終了です。「$f(\ )$ が示すもの」って何だったんだろうなんてことないですよね?「式の形とグラフの形」です。この話は実は後々「グラフの平行移動」でとても重要になってきます。ですから、中途半端な理解ではなく、しっかりと理解したと言えるように、何度も読み直してください。分からなければ、私にメールをください。可能な限り説明を付加したいと思います。

ところで、ふと変数がわかってない人がいると困るなぁと思ったので、次の項では変数について説明します。

1.4 変数とは

さて、皆さんはちゃんとこの変数という概念を理解しているでしょうか?きっとしているとは思いますが、念のため(^^)

「関数とは」のページから散々お話しているのできっと大丈夫だと思うので、とりあえず式から入りますね。y は x の関数とは

$$y = f(x) \tag{9}$$

のように表される関係でしたね。ここで式 (9) 中の x が変数になります。…そんなことは分かっているというツッコミが入りそうなので、ちゃんと説明しますね。

実はこの x は 1 つの値に決まってはいません。(これもそんなの当たり前じゃん!ってなツッコミが入りそう…)そういう 1 つの値に決まっている数を定数というのでしたね。しかしこの x は制限さえなければどんな数だって入れることができるのです。3.234 のような小数も $\frac{1}{2}$ のような分数も $\sqrt{2}$ のような無理数も $3 + 2i$ のような複素数も(普通は虚数は入れませんが)。

つまりあらゆる数を表す代理として x という文字を用いているんですね。だから値をコロコロと変化させることが出来る数、つまり変数というわけです。

当たり前のことっぽいでしょ?でもこれが分からないと次の「定義域と値域」の話がわかりませんよ?むしろ「定義域」と「値域」って何のことかわからない…なんてことにはなってないですよね?

次の項に行く前になぜ x の範囲を「定義域」といい、y の範囲を「値域」というのかを少々考えてみてください。ヒントは関数の定義「1 つの x が決まると、y の値が一意に決まるもの」にあります。

1.5 定義域と値域

さて、「変数とは」のページの最後に出した問題は解けたでしょうか？まだ考えずにこのページに来てしまった人は絶対に考えた方がいいですよ？考えれば考えるだけ、今までの知識として蓄えられた脳内の神経細胞間の結合が強固なものとなりますから。簡単に言うと「考えれば考えるだけ、脳の使い方がうまくなる」ということです。

では、「定義域」と「値域」について説明します。まず関数の定義は大丈夫ですよね？「1 つの x（入力）が決まったら、y（出力）の値が一意に決まるもの」でしたね。「一意に決まる」とは 1 つに決まってしまうという意味です。この定義をよく見ると、どちらが先に決定しているかは一目瞭然ですね。当然 x です。

つまり $y = f(x)$ という関数は、まず x の値を決めるということです。普通 x という変数は範囲を持っていますから（1 つの値 x は、範囲が無限小の 1 点を表すと考えれば、1 定数である x もまた範囲を持っていたと考えられますね)、その範囲ごと $f(\ )$ に代入してあげます。そうすると、出てきた出力 y ももちろんその x の範囲に応じた y の範囲を持ちますよね。

そうです。この関係こそが「定義域」と「値域」なのです。関数の範囲は最初に x が定義します。だから x の範囲が関数の範囲を定義する「定義域」となり、その x の範囲により求まった、関数の出力値の範囲が「値域」となります。

では、入力が 1 定数である場合と、範囲を持っている場合との違いをまずはブラックボックスを用いてイメージ化しましょう。

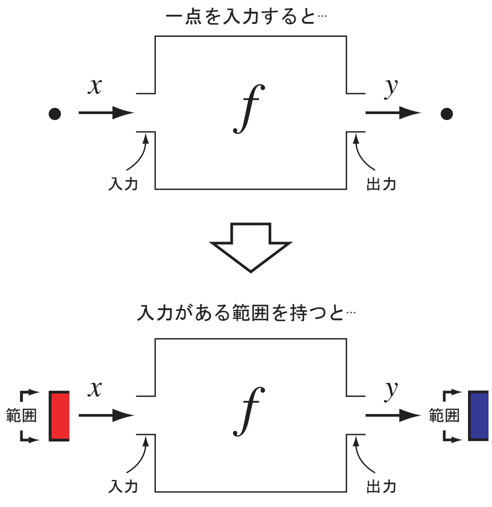

図 20: 入力の違いによる出力の違い

図 20 の上の図は入力が 1 点の場合のものです。もちろんブラックボックスは関数としての役割を果たしているものとすると、出力は 1 意に決定されるんでしたね。ですから出力も 1 点となります。

では図 20 の下の図のように今度は入力を範囲にしてみましょう。もちろん関数は 1 入力に対して 1 出力しか掃き出さないのですが、その 1 入力が限りなく連続した入力として（つまり範囲として）入力された場合、もちろん出力もその入力の各点に応じたものが範囲として出力されますよね？それが、赤い範囲としての入力に対する、青い範囲としての出力になります。

これを今度は数学の分野においてグラフで説明してみましょう。図 21 をご覧ください。

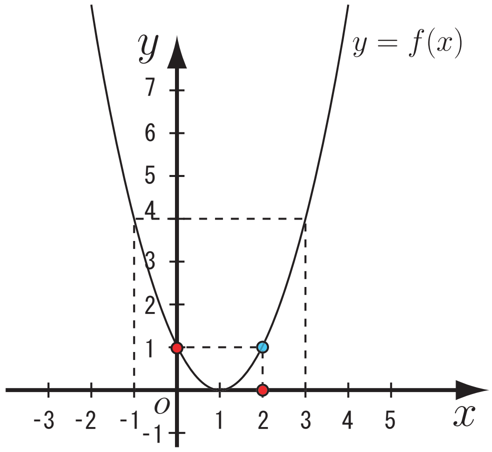

図 21: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ の $x = 2$ を考える

$y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ において入力を $x = 2$ とすると、それに対応するグラフ上の点は青丸で示した点であり、その出力（y 座標）はグラフよりもちろん 1 点で表され $y = 1$ となります。（もし分からなければ $y = f(2)$ として実際に $x = 2$ を代入してみてくださいね。）

ではこのとき入力を $2 \leqq x \leqq 3$ としたらどうでしょう？図 22 をご覧ください。

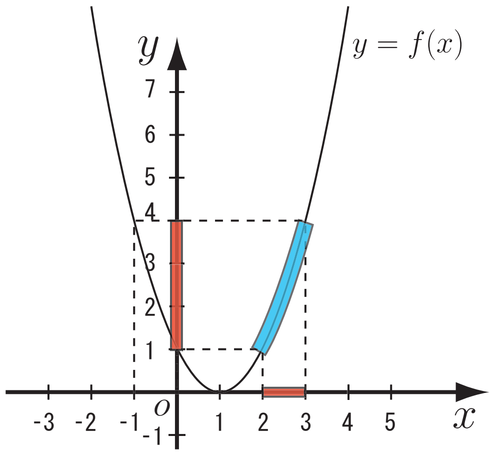

図 22: 入力が $2 \leqq x \leqq 3$ のとき

入力範囲 $2 \leqq x \leqq 3$ は x 軸上の赤い範囲になります。その範囲に対応するグラフ上の範囲は図中の青い枠になりますね。そこで、その青い枠に対応する出力（y 軸上）の範囲は $1 \leqq y \leqq 4$（y 軸上の赤い範囲）となります。図から自明ですし、求めるときは $x = 2$ と $x = 3$ を関数に代入して出てきた出力 y の 2 点間が値域といってあげればいいですね。

この場合の $2 \leqq x \leqq 3$ が「定義域」で、$1 \leqq y \leqq 4$ が「値域」なのです。わかって頂けたでしょうか？

1.6 $f(x) = g(x)$ が意味するもの

だんだん関数というものが見えてきたでしょうか？そうしたら、次の段階に入りたいと思います。次は関数同士を「＝」で結んだ等式が表す意味です。

ちょっと本題に入る前に、是非押さえておきたいイメージを確認しておきます。次の式を御覧下さい。

$$y = x^2 + 2x + 3 \tag{10}$$

「式 (12) 中の x^2 の x は 1 だけど、$2x$ の x は 3 を代入する」…なんてことは絶対にありませんよね？当たり前のことですが、違う値を意味するのであれば x の他に別に a や b などの変数を用いなければなりませんね。つまり、「**1 つの等式中の同じ文字は絶対に同じ値**」です。本当に当然のことですが、このページで学ぶ $f(x) = g(x)$ を理解するためには、絶対に必要な知識です。ちゃんと押さえておいてください。

ではタイトルにもなっている $f(x) = g(x)$ が意味しているものとは一体何なんでしょうか？これは実は次の二つの式を考える必要があります。

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \tag{11}$$

$y = g(x)$って一体何だ？と思った方もいらっしゃるかも知れませんね。大丈夫ですよ？大したことありません。ただ $y = f(x)$ と違う式を表すために関数の内容を表す部分の $f(\ )$ を $g(\ )$ に変更しただけです。以前に $f(\ )$ はグラフの形（式の形）を表すものだということを「$f(\ )$ が示すもの」というページで説明致しました。もし忘れていたら読み直してくださいね。つまり $f(\ )$ が表す式の形と $g(\ )$ が表す式の形が違うというだけです。

さて、では改めて考え直してみましょう。つまり $y = f(x)$ も $y = g(x)$ も共に関数なんです。関数の定義は…もうしつこ過ぎますか？ではそれは「関数とは」のページに譲りましょう。ここで適当に $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の式をグラフ化してみます。（ここで言う適当は、日常使う適当です。何でもいいんだけど…みたいな感じです。）

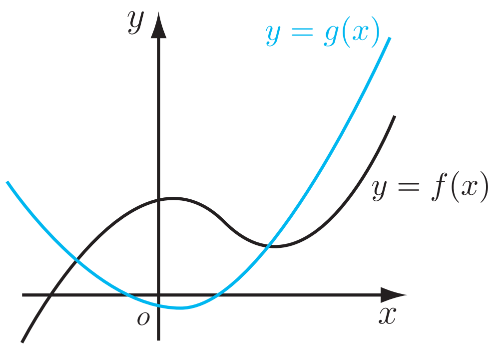

図 23: 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

図 23 をご覧下さい。本当に適当に関数を決めました。今回はずっとこの形で話を進めていきます。

さて、もう一度式 $f(x) = g(x)$ を見て下さい。これは式 (11) の 2 式を「＝」で結んだ等式ですよね？1 つの等式ですから、その中で使われる x は当然ながら $f(x)$ の方も $g(x)$ の方も同時に同じ値になります。

ではこの $f(x) = g(x)$ が言っている意味は何なんでしょう？…「**ある x を入れたとき、$f(x)$ も $g(x)$ も同じ値を出力するもの**」です！ちょっとまだイメージがつかめないでしょうか？ではまず BLACH BOX に再度登場してもらいましょう。図 24 をご覧下さい。

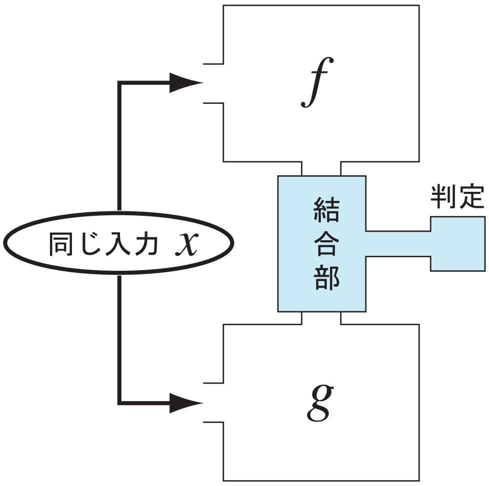

図 24: 新ブラックボックス「連結君バージョン」

2 つの BLACK BOX に登場してもらいました。ではルールを説明します。

まず入力はそれぞれ同時に同じものを入力するようにします。それぞれの関数（機能）は f と g で表されています。そしてそれぞれの出力は直接見ることが出来ず、その出力同士を連結部で結合して、「もし同じ出力が得られたら○、得られなかったら×」を出力するように構成しました。

なぜこのような面倒な構成にしているかというと…それは後々わかるとは思いますが、$f(x) = g(x)$ の式のイメージに合わせているからです。では図 25 のように f に「ゆでる」を、g に「料理が苦手な人の料理」という機能を与えます。当然どちらも関数ですから「料理が苦手な人の料理」はどんな食材でも 1 対 1 対応のとても残念な料理となります（ ^^ ）

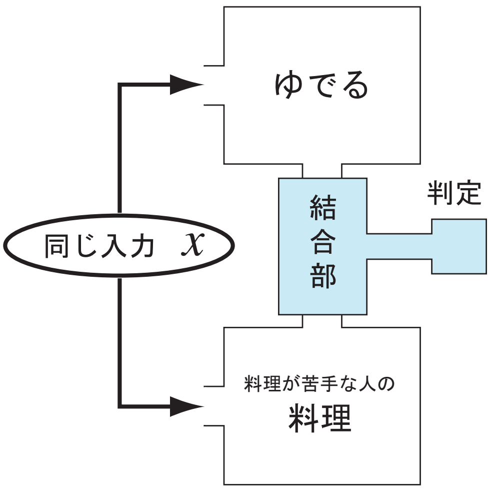

図 25: 機能を与えます

さぁ、準備は整いました。早速入力食材「だいこん」を入力してみましょう。図 26 です。

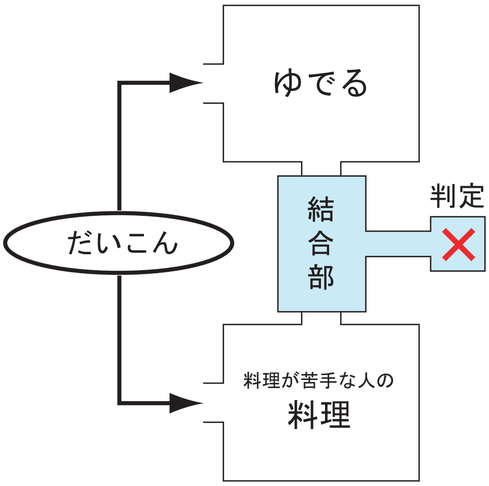

図 26: だいこん入力

アレ？出力に「×」が出てますね。ちょっと検証しましょう。「だいこん」を「ゆでる」と…私の発想が貧困なのか料理名が浮かびません…。「だいこん」を「料理が苦手な人の料理」に入れると「だいこんおろし」になりました。「ゆでる」の方の出力は…「ゆでだいこん」として…出力が互いに違うので（本当は確認できないんですよ？検証のためにとりあえず出力させましたが…）出力結果が「×」になったんですね。

では、今度は入力に「たまご」を代入してみます。

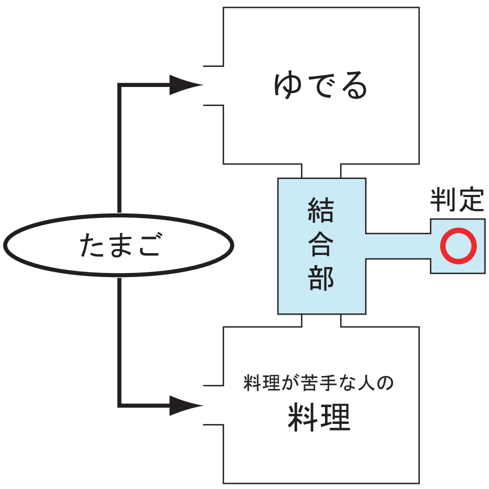

図 27: たまご入力

今度は出力に「○」が出てますね。これは「ゆでる」も「料理が苦手な人の料理」もともに「ゆでたまご」になった結果だと思われます。（「料理が苦手な人のたまご料理」が「ゆでたまご」とは限らないという意見はこの際却下です。）

さて同様のことが $f(x) = g(x)$ でも行われます。再度図 23 に登場してもらいましょう。

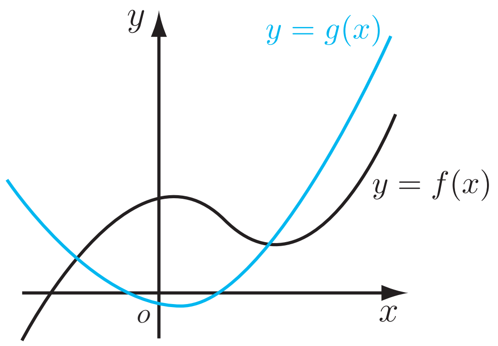

図 23: 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

さっきまでイメージしてきた「連結された BLACK BOX」は数学におけるグラフ上ではどのようにイメージされるのでしょうか？図 28 をご覧ください。

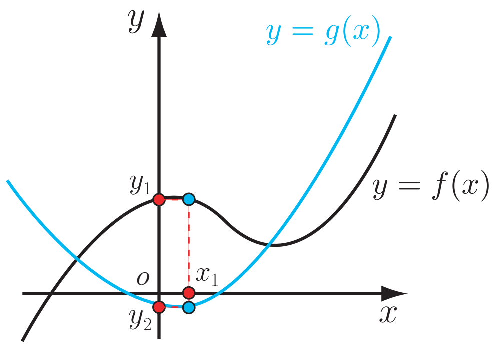

図 28: だいこんと同じ入力

$x = x_1$ のとき、$f(x_1)$ が示す値はグラフからも分かるように y_1 となります。では $g(x_1)$ はどうでしょう？…y_2 になってますね。つまり同じ入力 $x = x_1$ に対して出力の y_1 と y_2 が違っているのです。だから、このときの x_1 は $f(x) = g(x)$ の等式を満たしません。(「=」で連結していますが、出力が異なるので「×」が出るのです。つまり「だいこん」のときと同じです。)

では「連結 BLACK BOX」の「たまご」に相当するのはグラフ上のどの x になるのでしょう？

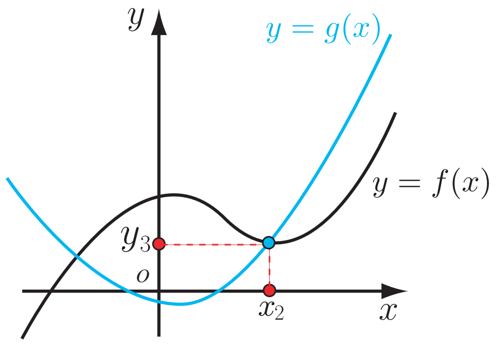

図 29: たまごと同じ入力

図 29 をご覧ください。$x = x_2$ を代入したとき $f(x_2)$ も $g(x_2)$ も同じ値（出力値）y_3 になってますね。だから x_2 は $f(x) = g(x)$ の等式を満たしています。(つまり「=」で連結されているその両サイドから同じ出力値が得られるので「○」になるのです。) さらにもう一つありますね。それが図 30 の x_3 です。

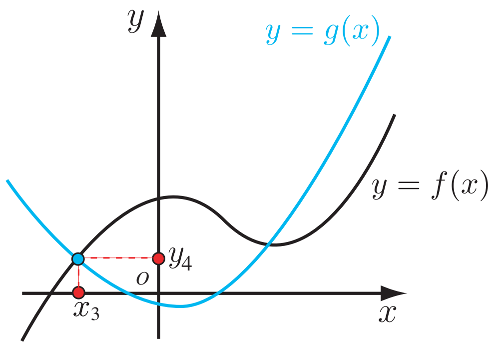

図 30: たまごと同じ入力 2

したがって、$f(x) = g(x)$ を満たすのは図 29 と図 30 の x_2 と x_3 となります。

気付いたでしょうか？そう、結局 $f(x) = g(x)$ で求まるものは、「$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点」になるわけです。そして、より正確に言うと $f(x) = g(x)$ で求まるものはその「$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標」なのです。ではそのときの y 座標はどのようにして求めればよいのかと言いますと…、それはもちろん求まった x_2 や x_3 を

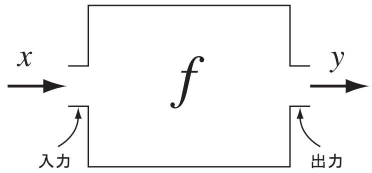

図 31: いつもの BLACK BOX

いつもと同様に単に BLACK BOX に代入してあげれば良いわけです。それは

$$y_2 = f(x_2) \ or \ g(x_2) \tag{12}$$
$$y_3 = f(x_3) \ or \ g(x_3) \tag{13}$$

とすることと同値です。さきほど「連結 BLACK BOX」のルールのときに「出力は直接見ることが出来ない」と説明したのを覚えているでしょうか？

それは $f(x) = g(x)$ においてその $x = x_2$ を代入したときの値はあくまでもその「左辺と右辺が同値になること」を意味するのであり、普通は $f(x) = g(x)$ は $f(x) - g(x) = 0$ の形に式変形してその等式の解を求めますよね？その結果因数分解されて出てくる $x = x_2$ や x_3 をその式に代入すると式全体が 0 となってしまって $f = f(x_2)$ の値を直接出してはくれないからなのです。（よく分からなければそれはそれで構いませんよ？いづれ計算していくうちに分かるようになります。ここの話は経験値が大きく物を言うと思います。）

1.7 $f(x) = 0$ が意味するもの

実は $f(x) = 0$ はすでに $f(x) = g(x)$ で説明が終了しているようなものなのですが…、しかし $x^2 + x - 2 = 0$ のような式はこれからもしょっちゅう見ると思いますし、敢えてここでもう一度取り上げるのもありかと思い、書いています。

では $f(x) = 0$ に関して考えてみましょう。これは上でも言いましたように $f(x) = g(x)$ の内容と全く同じです。つまり

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \tag{14}$$

という 2 式の交点を求めるものです。正確には「$y=f(x)$ と $y=0$ との交点の x 座標が求まる」のでしたね。そのときの y 座標が知りたければ、改めて $y=f(x)$ か $y=0$ に代入するのですが…、当然 $y=0$ に決まっています。

ところで、数学を習いたての方は $y=0$ が何故関数なのか、もしかしたらイメージし辛いかも知れませんね。ではとりあえずそこからお話します。

$y=g(x)=0$ という式を定義します。これは y は x の関数で、その関数の形は $g(x)=0$ と表されているという意味を有します。$g(x)=0$ というのは、いかなる x を代入しても常に（出力）値が 0 である点の集合ですよね。（出力値と言っているのは結局 y 座標のことですよ）そういう集合って何を表すのでしょうか？図 32 をご覧ください。

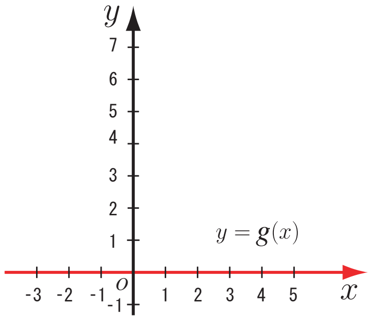

図 32: いかなる x を代入しても常に値が 0 のグラフ

そうですね。任意の x を代入しても常に 0 となる関数が表すものは x 軸そのものです。グラフを見れば一目瞭然です。

つまり $f(x)=0$ が何を語っている式かと言いますと、「$y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標を求めよ」という内容なんですね。では具体的に $f(x)$ を決めて考えてみましょう。例として先ほど挙げた

$$y=f(x)=x^2+x-2 \tag{15}$$

という式を考えてみます。まずは平方完成してグラフを描いてみましょう。

$$\begin{aligned} y=f(x)&=x^2+x-2 \\ &=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4} \end{aligned} \tag{16}$$

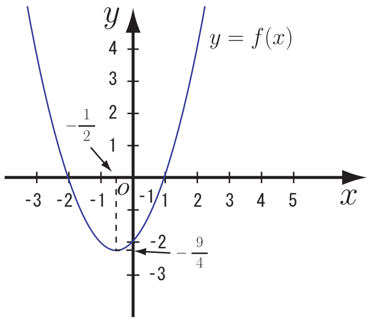

図 33: $y=f(x)=x^2+x-2$ のグラフ

描けましたね。ではこの $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点はどこでしょうか？

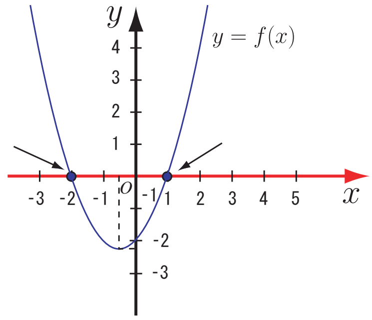

図 34: $y = f(x)$ と x 軸との交点

出ましたね。つまり

$$x^2 + x - 2 = 0 \tag{17}$$

という方程式を解くと（式 (17) を満たす x を求めるという作業）、$x = -2$、1 という 2 点が求まるわけです。では (17) を解くにはどうしたらいいのでしょうか？次の「因数分解は何故するのか」に行きましょう。

ここで突然「方程式」ということばを出したせいで驚かれた方もいらっしゃるかも知れませんね。等式中の文字にある値を代入したときにだけ成立するような等式があるとき、その等式のことを方程式と呼びます。$y = f(x)$ という式においては、x に無限の値を代入でき、その結果もまた 1 対 1 対応で無限に出てきますが、$f(x) = g(x)$ においてはこの等式を満たすいくつかの x のみが得られるだけですので、こういう式を「方程式」と呼びます。

1.8 何故因数分解をするのか

数学が出来ない人の問題の解き方をじっと見ていると、必ず出くわすことがあります。次の式 (18) があったとき、皆さんは何をしようと思いますか？

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \tag{18}$$

もちろん今回は問題文は与えません。ちょっと考えてみてください。きっと 3 パターンに分かれたと思います。

- 平方完成をした人
- 因数分解をした人
- 何もできなかった人

では考えてみましょう。

まずは「何もできなかった人」: 頑張ってこれから知識を身につけていきましょう。最初は誰もが初学者です。ちゃんと原理的イメージを押さえてしまえば、どんな問題も瞬間に解法が思いつくはずですよ。

次に「平方完成した人」: きっと $y = f(x)$ とおいてとりあえずグラフでも描いてみようか？と思った方々でしょうね。問題文がない状態ではそれが正解です。グラフは何よりも直感的にイメージを与えてくれます。分からなければまずグラフを描く！これはある意味鉄則ですよね。

最後に「因数分解をした人」: 注意して欲しい方々です。きっと他の分野でも公式を丸暗記してどうにかこうにか定期テストは乗り切ったものの、実は内容を全く理解しておらず、実力テストや模擬テストでは

散々な結果になっている可能性が大です。今のところきっと数学が大嫌いじゃないでしょうか？でも大丈夫。ちゃんと「何故因数分解をするのか？」という疑問を解決すればきっと違った見方ができるはずですよ。

何やら心理テストみたいになっていますが、特に「因数分解をした人」はしっかりと以降を読んでくださいね。

では説明します。まずは「因数とは」というお話から。「因数」とは「ある数が積の形で表されたときの、積の形に分けられたそれぞれの数」を言います。例を見たほうが早いですね。

$$15 = 1 \times 15 \tag{19}$$

右辺の 1 や 15 が左辺の 15 の因数です。もちろん

$$15 = 3 \times 5 \tag{20}$$

と表されれば、3 や 5 が左辺 15 の因数です。しかし「因数」と「約数」は別物ですのでご注意ください。「約数」とはその数を「割り切れる数」のことですよね。15 の約数は 1、3、5、15 ですがあくまで「因数」とは積の形で表されたものです。よって式の作り方によっていくらか因数の組が出ることになります。

素因数分解とはまた別物です。「素数」とは 1 とその数以外で割り切れないものでしたね。ですから 2 や 3 や 5 が素数になります。また「素数」に 1 は含みません。それは何故でしょうか？15 を素因数分解してみましょう。（素数を因数 [掛け算] に分解することを素因数分解と言います。）

$$15 = 3 \cdot 5 \tag{21}$$

ここに 1 を加えてみるとどうなるでしょう？

$$15 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \tag{22}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \tag{23}$$

式 (22) でも式 (23) でもどちらも 15 を表してしまいますね。そうすると 15 を素因数分解したときの結果が必ず 1 通りになるという「一意性」が保てません。だから 1 は素数に入らないんです。ここまでが整数に対するお話です。では多項式に関してはどのように扱われるのでしょう？

多項式でも整数のときとほぼ同じように表されます。しかし違うのは因数が「既約多項式」である必要があるということです。ではまず「既約多項式」から説明しましょう。

「既約多項式」とは簡単に言うと、自分以外の多項式で割れない多項式です。多項式のイメージが湧かないでしょうか？$3t+5$、$2x^2+3$、z などが多項式です。つまり 1 次以上の文字が含まれている式です。だから整数は多項式には含めません。

（1 次以上と書いてしまいましたが「次数」の認識は大丈夫でしょうか？次数とは「x の何乗」と表すときの「何」にあたるものをいいます。つまり x^2 でしたら 2 次ですし x^5 だったら 5 次になるわけです。そして式の次数とは、その式の項の中で最も高い次数によって表されます。つまり $x^2+3x+1=0$ だったら、x の最大次数は x^2 の 2 次ですから、その式全体の次数も 2 次となります。$y=x^5+1$ であったら 5 次の関数です。）

では改めて多項式における因数分解を考えていきましょう。この多項式を因数分解するとは「多項式を既約多項式の積の形」で表すことを言います。

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) \tag{24}$$

式 (24) のような式があった場合、左辺の $x^2 + 3x + 2$ の因数は $x + 1$ と $x + 2$ になります。しかし次の式は多項式の因数分解とは言いません。

$$3x + 9 = 3(x + 3) \tag{25}$$

有理数係数多項式の範囲において式 (25) の左辺はすでに自分（$3x + 9$）以外の多項式で割れない「既約多項式」です。右辺は「既約多項式の積の形」にはなってないですね。3 が多項式ではないですから。

しかし高校では整数係数の範囲の多項式を扱うので、$3x + 9$ は「既約多項式」ではなく $x + 3$ が「既約多項式」となります。つまりくくり出せる整数はくくり出して残った多項式が「既約多項式」であるということです。しかしその「整数係数多項式」においても式 (25) は因数分解とは呼びません。それは「既約多項式」の定義に「整数」が入らないためです。

ここでもう一度おさらいしておきますと「多項式」を因数分解するとは「既約多項式の積の形にすること」です。

「因数分解」の説明の最後に式 (26) を見てください。

$$\begin{align} 2x^2 + 6x + 4 &= (x + 1)(2x + 4) \tag{26} \\ &= (2x + 2)(x + 2) \tag{27} \\ &= 2(x + 1)(x + 2) \tag{28} \end{align}$$

高校で習う「整数係数多項式」の系において、式 (26) の右辺は「既約多項式の積の形」になっていません。式 (27) のようにも表せますし、そうすると「因数分解の一意性」が保てませんよね。したがって「多項式」中のさらにくくれる整数はくくり出して整数係数において「既約多項式」となった式 (28) の形の $x + 1$ と $x + 2$ を $2x^2 + 6x + 4$ の因数と呼びます。

思わず思いっきり長く説明してしまいました…。ではそろそろ本題の「何故因数分解をするのか」に話を進めていきましょう。

次の式 (29) をご覧ください。

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \tag{29}$$

式が、一つ前のページで学んだ $f(x) = 0$ の形をしているのが分かるでしょうか？もちろん分かりますよね（ ^^ ）では、この式 (29) が語っている内容も分かりますよね？この等式を満たすのは「関数 $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ と $y = 0$ との交点の x 座標」です。つまり、等式を満たす x を求めると（つまり等式を解くと)、「$y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ と $y = 0$（x 軸）との交点の x 座標が求まる」ということですね。

しかし、どうやって求めましょうか？例えば式 (29) の左辺の x^2 が 0 になるような x を求めれば良いのでしょうか？そうすると

$$x^2 = 0 \tag{30}$$

となって $x=0$ と求まりますが、それを式 (29) に代入すると左辺が $0^2+3\cdot 0+2$ となって結局 2 という値になってしまいます。つまり $2\neq 0$ となって等式が成り立ちませんね。

ではどうしたら式 (29) を満たす x が求まるのでしょうか？次の式をご覧ください。

$$y\cdot z=0 \tag{31}$$

式 (31) を満たすような y や z は何でしょう？もし y が 0 なら z の値が何であれ、絶対に左辺は 0 になりますね。つまり $0=0$ となりますから、式 (31) を満たします。同様に $z=0$ のときも y の値が何であれ、左辺は必ず 0 となりこれまた式 (31) を満たします。つまり、式 (31) を満たす条件は $y=0$ かまたは $z=0$ なんですね。

では式 (31) を見て何か気付いたでしょうか？

ここで重要だったのは、「積の形=0」となっていたら、その積の各項のうちどれかが 0 になれば、あとの項はどうであれ、かならず等式を満たすということだったのです。だって 0 に何をかけても 0 になりますから。

ほら、ここで気が付くでしょ?「積の形=0」となってたら…って、つまり「積の形」と言ったら「因数分解」じゃないですか！見えて来ましたね。

$$x^2+3x+2=0$$

もう一度式 (29) を書いてみました。さて、これは因数分解できますよね。ですから

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=0 \tag{32}$$

と変形できます。ほら $(x+1)(x+2)=0$ の意味を確認すると、$x+1=0$ かまたは $x+2=0$ だったら、ちゃんと式 (32) を満たすと言っていますよね？つまり式 (32) を満たす x は $x=-1$ と $x=-2$ だということです。そして出てきたこの 2 数はもちろん $y=f(x)=x^2+3x+2$ と $y=0$ との交点となるわけです。グラフで確かめてみましょうね。

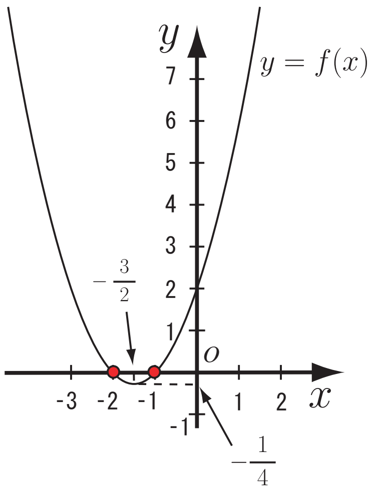

図 35: $y=f(x)$ と $y=0$ との交点

確かに $y=f(x)=x^2+3x+2$ のグラフと $y=0$ との交点は $x=-1$ と $x=-2$ になっています。

ここまでくると、「何故因数分解をするのか」という問いに対する答えが見えてきますね。答えは「積の形=0 とすることで、そのどちらかが 0 になると必ずその等式を満たす x が求まるから。」です。さらには

その x は左辺の $y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標でした。

だから、逆に $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ とあっても因数分解はしませんよね？それは「$y = f(x)$ と何の交点も別に求めたいわけではないから」です。どちらかというと、平方完成することでその関数の概形を描きたいところです。図 35 となります。

ところで、ここらは「何故因数分解をするのか？」という問いからは外れてちょっと余談となってしまいますが、「式変形が表す意味」について、お話したいと思います。興味がおありでしたら、お付き合いください。

折角ですのでもう一度先ほどの式に登場してもらいましょう。

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \tag{33}$$

この式が表す図上の交点を覚えてますか？忘れた人は図 35 をもう一度ご覧ください。

さて、今回はちょっとこの式 (33) をいじって変形させたいと思います。

$$x^2 + 3x = -2 \tag{34}$$

左辺にあった 2 を右辺へ移項させました。もちろん式 (34) 自体は式 (33) を変形しただけですから、**解は変わるはずがありません。** ではこの式は何を意味するのでしょうか？…それはもちろんもう分かりますよね？分からない人は是非「「$f(x) = g(x)$ が意味するもの」に戻って読み直してください。

そう、式 (34) が意味するものは「$y = f(x) = x^2 + 3x$ と $y = g(x) = -2$ との交点」またはその x 座標です！ですから、ここから求まる解は図 36 における交点を意味します。（式 (35) は式 (34) の左辺を平方完成したものです。）

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 + 3x \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned} \tag{35}$$

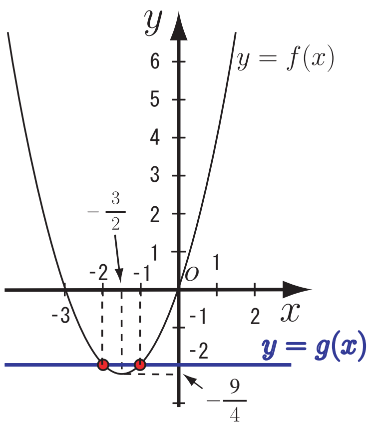

図 36: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ との交点

図 36 をご覧になってもわかるように、$y = f(x) = x^2 + 3x$ と $y = g(x) = -2$ との交点も、$y = x^2 + 3x + 2$ と $y = 0$ の交点と同様に $x = -2、-1$ となります。

さらに、式 (33) を式変形してみましょう。

$$x^2 = -3x - 2 \tag{36}$$

式 (36) のようになってしまいました。これが意味するところは…もう大丈夫ですね。「$y = f(x) = x^2$ と $y = g(x) = -3x - 2$ との交点」またはその交点の x 座標です。もう説明なしに、図を見てみましょう。

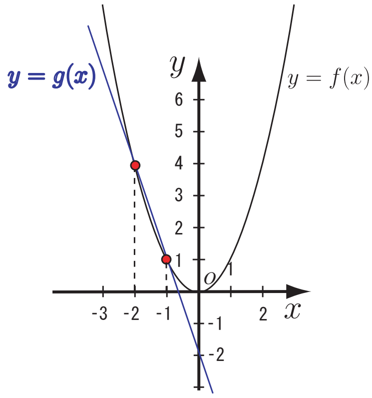

図 37: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ との交点

ね！やっぱり交点の座標は $x = -2$、-1 になったでしょ？（まぁ、式変形しただけですから当たり前ですが…）こうして、同じ解が求まる等式であっても、その等式の形が意味するグラフとそしてその意味はそれぞれ異なってきます。このイメージがあれば、これから等式を解くときに式が語っている内容が分かるようになりますよ！

1.9 グラフの平行移動

ここまでで、かなり関数に関しての理解が深まったことと思います。ここからは、これまでの知識を利用してグラフの平行移動を理解したいと思います。

恐らくほとんどの高校生の皆さんは x 軸方向へ 1 だけ平行移動すると元の式の x を $x - 1$ にするとだけ覚えていると思います。(x 方向に $+1$ 移動なんだけど何故か -1 するみたいな、一種の法則的な扱いになっていますよね？）それを完全に理屈で理解してみましょう。

もちろん最後には結局その「x 軸方向へ 1 だけ平行移動すると元の式の x を $x - 1$ にする」を使います。その方が早いからです。しかし、軽い問題ばっかり解いてそれで終わりなら問題は無いのですが、大学の入試問題においてそんな「訳わからない法則」を駆使するだけの「法則オンリー」な解き方だけでは、完全に門前払いされてしまいます。

難しいとされる問題をすらすらと解いてみたいですよね？だったら、何でもかんでも公式を暗記！ではなく、何故そのようにするのかという原理を理解してみましょう！大学入試の問題はその原理を問う問題です！

まずは次の式 (37) を見てみましょう。

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{37}$$

$$= (x - 1)^2 \tag{38}$$

式 (37) は平方完成すると式 (38) のようになります。これが言っている意味は、頂点が (1, 0) で下に凸の二次関数ですよね？ではグラフにしてみましょう。

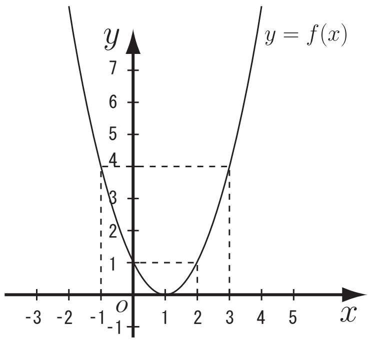

図 38: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフ

ここまではきっとできたと思います。ではこれを x 軸方向へ 1 だけ平行移動してみましょう。

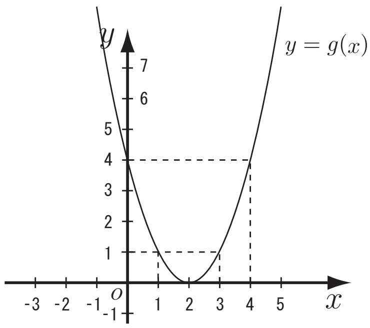

図 39: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動

移動しましたね。このように描くと皆さんはもうグラフから式を作れるのではないでしょうか？
頂点は (2, 0) で、x^2 の係数が 1、そして下に凸のグラフなので

$$y = g(x) = (x-2)^2 \tag{39}$$
$$= x^2 - 4x + 4 \tag{40}$$

のようになります。式 (39) を展開すると式 (40) の形となります。

そうもちろん平行移動後のグラフの式の表し方はこのようにグラフから読み取る方法もあります。しかし今後はちょっと違ったことを今の図 38 と図 39 から読み取ってもらいたいのです。では今の図 38 と図 39、さらにはもう一つ同じような図を横に並べてみますよ？

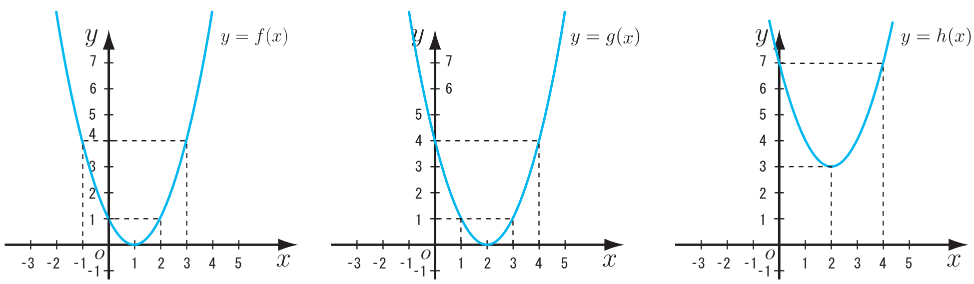

図 40: 平行移動の 3 種の図

さて、この 3 つの図を並べられると気付くことはありませんか？数学的にとか言うつもりはありません。小学生でも気付くことです！

…そう、**二次関数のグラフの形が同じ**だということに気付きましたか？え？グラフの形が同じという意味がわからない？では次の図を見ればわかるでしょうか？

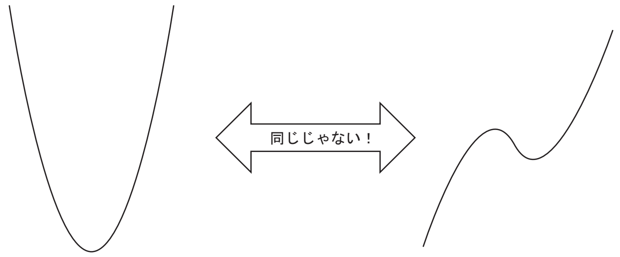

図 41: 異なるグラフ

わかりましたよね？グラフの形が同じというのは、二次関数の形が同じだということです！

グラフの形が同じということは…何か思い出すことがありませんか？そう「$f(\ )$ が示すもの」のページで勉強しましたね。「グラフの形が同じ」＝「$f(\ )$ が同じ」ということです！

つまり図 40 のそれぞれのグラフを表す式 $y = f(x)$、$y = g(x)$、$y = h(x)$ は同じ形をしているはずなのです！

式が同じという意味はわかりますか？$y = f(x)$ の式の形は今回 $y = f(\bigcirc) = \bigcirc^2 - 2\bigcirc + 1$ の形ですね。つまりこの形をしているということです。

では、もう一度図 38 と図 39 のグラフを並べて考えてみましょう。

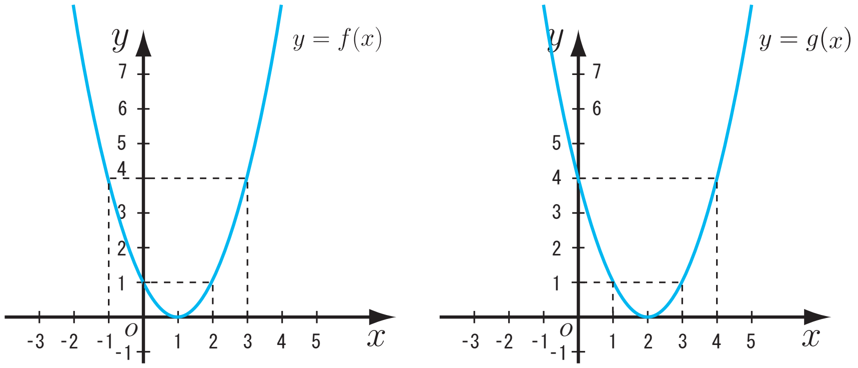

図 42: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ は**グラフの形**（二次関数部分）**がまったく同じ**なので、式も同じ形をしています。$y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ を基準とすると $y = g(x)$ も $y = \bigcirc^2 - 2\bigcirc + 1$ の形をしているはずです。$y = \bigcirc^2 - 2\bigcirc + 1$ という形は $y = f(\bigcirc)$ で表されるので、つまり $y = g(x) = f(\bigcirc)$ と表せるということです。では第 2 式 $y = g(x)$ も $g(x)$ を用いずに $y = f(\bigcirc)$ と表して考えてみましょう。

表 1 を見て下さい。左の第 1 式の方が $y = f(x)$ の式に各 x を代入したときの y の出力になります。図と見比べてみると簡単に理解できます。

第 1 式			第 2 式		
$y = f(x)$			$y = f(◯)$		
$x = 0$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$◯ = 0$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 1$	$\longrightarrow$	$y = 0$	$◯ = 1$	$\longrightarrow$	$y = 0$
$x = 2$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$◯ = 2$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 3$	$\longrightarrow$	$y = 4$	$◯ = 3$	$\longrightarrow$	$y = 4$

表 1: $y = f(x)$ と $y = f(◯)$ の関係

今度は第 2 式の方をご覧下さい。◯で見ると、その◯に 0〜3 を入れたら…$f(\ )$ の形は $y = f(x)$ と同じなので、当然 $y = f(x)$ と同じ値になりました。

ようやく、下準備が出来ました。これから第 2 式のグラフについて考えたいと思います。

第 2 式を表すグラフの式 $y = f(◯)$ の◯に x 軸の各値を代入したとき本当に欲しい値はグラフから見たらわかるように、表 2 のようになります。

第 2 式		
$y = f(◯)$		
$x = 1$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 2$	$\longrightarrow$	$y = 0$
$x = 3$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 4$	$\longrightarrow$	$y = 4$

表 2: 本当に欲しい関係

しかし、現実に◯に $x = 1$ 等を代入すると表 1 が示すように、もとの第 1 式 $y = f(x)$ と同じ値になってしまいます。では、どうしましょう？$x = 1$ のときには $y = f(0)$ のときの値が、$x = 2$ のときには $y = f(1)$ のときの値が、$x = 3$ のときには $y = f(2)$ の値が、そして $x = 4$ のときには $y = f(3)$ のときと同じ値が欲しいわけです。気付きましたか？つまり第 2 式の x の値よりも 1 つ小さい x が $f(x)$ に入ったときの値にしたいわけです。

そう！だったら、$y = f(x)$ に x を代入するときに x の値を 1 つ下げてあげればいいじゃないか！と気付きますよね！BLACK BOX で考えると、入力の前に一つ x の値を下げることができるフィルターを入れるというイメージでしょうか。

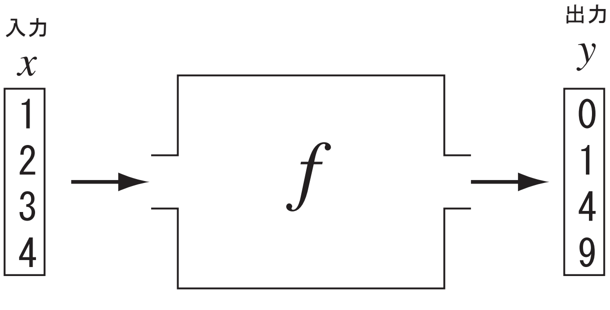

図 43: そのまま入力したとき

このままでは入力がそのまま入ってしまいます。そこで、フィルターをかけて入力から 1 引いた値を BLACK

BOX に入力してみましょう。

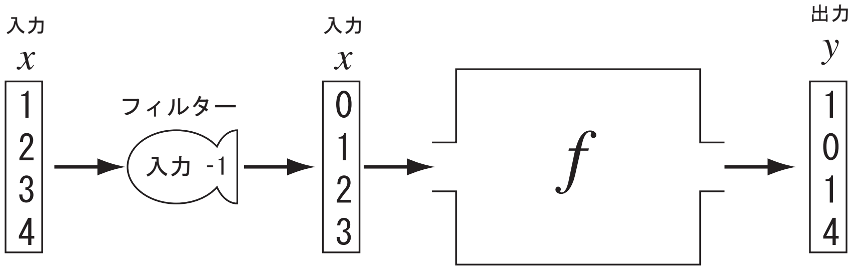

図 44: フィルターを介して入力

そうすると、入力は第 2 式の x の値のままですが、関数（BLACK BOX）に入力される値は 1 つ小さな x となって、その結果出てくる値はその小さくなった x に対応する値となりますね！

どうですか？分かってきたでしょうか？つまりグラフの形が第 1 式 $y = f(x)$ と同じ第 2 式は、式の概形は第 1 式と同じ $y = f(\ )$ です。ただし、入力する x の値をそのまま入れると第 1 式のグラフと全く同じになって平行移動しませんから、第 2 式の x を代入するときにフィルターをかけて 1 つ x の値を小さくするわけです。それを式にすると $x - 1$ をして入力するということなので、第 2 式を表す関数は $y = f(x - 1)$ となります。

これが平行移動したのは x 軸の正方向なのに、代入する値は x − 1 という様に、1 引く作業をする理由です。

1.9.1 x 軸方向へ

今度はちゃんとグラフを確認しながら、式変形して考えていきましょう。

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{41}$$
$$= (x-1)^2 \tag{42}$$

式 (41) を平方完成すると式 (42) のようになります。これが言っている意味は、頂点が (1, 0) で下に凸の二次関数でした。

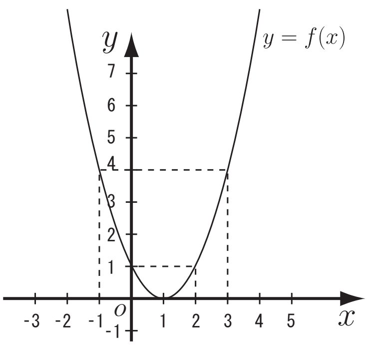

図 45: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフ

グラフにすると図 45 のようになります。ではこれを x 軸方向へ 1 だけ平行移動しましょう！

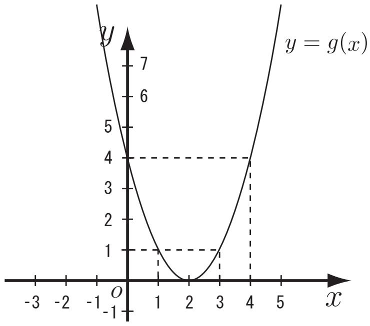

図 46: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動

このように描けました。きっと今までだとグラフから式を作る方法をとっていた方も多いのではないでしょうか？

頂点は (2, 0) で、x^2 の係数が 1、そして下に凸のグラフなので

$$y = g(x) = (x-2)^2 \tag{43}$$
$$= x^2 - 4x + 4 \tag{44}$$

のようになります。式 (39) を展開すると式 (40) の形となります。

では、これをグラフの平行移動という概念からまず式に手を加えることで、一瞬にして平行移動し終わった関数を作ってみましょう。

最初にグラフは同じだから、元の式と形は同じであることを再度確認しておきます。では、x 軸方向へ 1 だけ平行移動するのでしたから、$y = f(x)$ の x にフィルターをかけて $x - 1$ にして入力します（$y = f(x-1)$）。

$$y = g(x) = f(x-1) \tag{45}$$
$$= (x-1)^2 - 2(x-1) + 1 \tag{46}$$
$$= x^2 - 4x + 4 \tag{47}$$

式 (45) は元の $y = f(x)$ に対して x を $x - 1$ にして代入したことを意味します。もちろんその式は $y = g(x)$ と表されていたので、$y = g(x) = f(x-1)$ となっています。

もとの $y = f(x)$ は $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ですから、その各 x が $x - 1$ になると、式 (46) のようになります。

そこで式 (46) を展開すると…式 (47) になります。これは先ほどグラフから読み取った式 (44) と同じですね。つまり x を $x - 1$ と変えて元の式 $y = f(x)$ に代入するだけで、平行移動したあとの式が求まりました。

したがって、まとめますと $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向へ α だけ平行移動したいときは x を $x - \alpha$ に変更して $y = f(x - \alpha)$ を求めればよいということです。何故 $x - \alpha$ のような式変形をするのか？という疑問が残る方は、もう一度「グラフの平行移動」のページをご覧ください。

1.9.2　y 軸方向へ

「x 軸方向へ平行移動」はちゃんと理解できたでしょうか？出来てないならもう一度戻って完全に理解してくださいね。

ではここからは「y 軸方向へ平行移動」したときの式変形を考えていきたいと思います。しかし、心配することはありませんよ？「x 軸方向へ平行移動」と考え方は何ら変わりありません。とても簡単なお話です。ただし、皆さんが今まで中学生のときからやってきた式変形は捨てていただくこととなるかも知れません。

さて、最初に「グラフの平行移動」からずっと使ってきている式をもう一度呼び出してみましょう！

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{48}$$
$$= (x-1)^2 \tag{49}$$

もう説明の必要はありませんね。ではこの式 (49) が表すグラフを描いてみましょう。

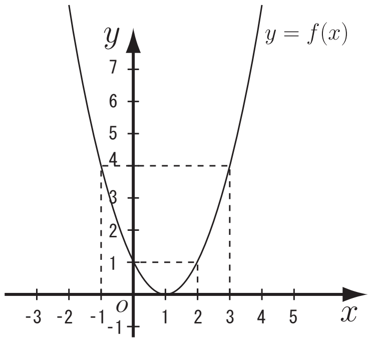

図 47: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフ

何度も目にしているグラフですから、すぐに描けますよね？ではここからが今回のテーマです。y 軸方向へ 2 だけ平行移動してみましょう！グラフは図 48 のようになります。

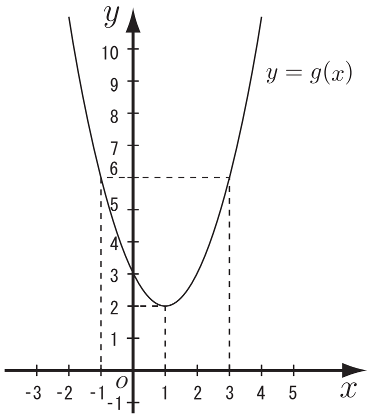

図 48: $y = f(x)$ を y 軸方向へ 2 だけ平行移動

$y = f(x)$ を y 軸方向へ 2 だけ平行移動したグラフを表す式を $y = g(x)$ とします。そうするとグラフから読み取ったらすぐに式は書けますね。

$$y = g(x) = (x-1)^2 + 2 \tag{50}$$
$$= x^2 - 2x + 4 \tag{51}$$

この方法がきっと最初に習う方法だと思います。上（y 軸方向）に移動した分だけ、元の式の右辺に加えるという方法のことです。しかし、後々数学的に式から図形を理解するために

$$y = a(x-p)^2 + q \tag{52}$$

となっていたら $(p,\ q)$ が頂点とかいう覚え方はやめて下さい。これだとちょっと今後発展性がないからです。

では x 軸方向へ平行移動のときと同じように移動前と移動後の二つのグラフを並べて見てみましょう。

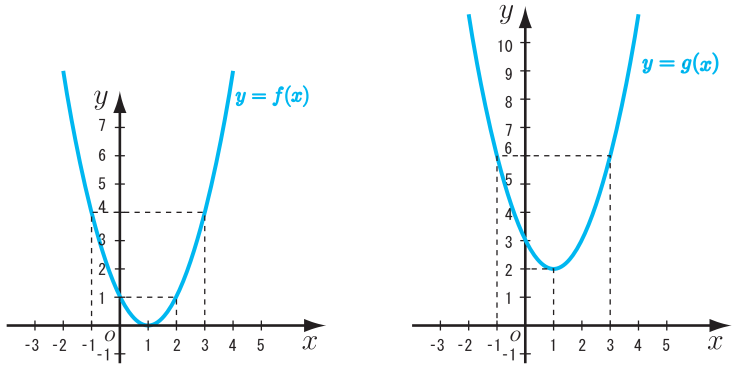

図 49: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

二つを見比べると気付くことがありますね。x 軸方向へ平行移動のときにも言いましたが…そうです！グラフの形が同じですよね。グラフの形が同じ…というのはつまり「式が同じ形をしている」でしたね。（分からなければ「グラフの平行移動」のページを見てください。）従って $y = g(x)$ は $y = f(◯)$ という形で表されます。

第 1 式			第 2 式		
$y = f(x)$			$y = f(◯)$		
$x = 0$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$◯ = 0$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 1$	$\longrightarrow$	$y = 0$	$◯ = 1$	$\longrightarrow$	$y = 0$
$x = 2$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$◯ = 2$	$\longrightarrow$	$y = 1$
$x = 3$	$\longrightarrow$	$y = 4$	$◯ = 3$	$\longrightarrow$	$y = 4$

表 3: $y = f(x)$ と $y = f(◯)$ の各値

表 3 をご覧下さい。第 1 式は図 49 の左図のグラフの式 $y = f(x)$ を示しています。もちろん第 2 式は右図のグラフの式 $y = g(x) = f(◯)$ の $0 \leqq x \leqq 4$ に対応する各 y 座標の値を示したいのですが…、しかし $y = f(◯)$ の形をしているので、◯に 0 や 1 などを入れても x のときと同じ値を示してしまいます。

さらに今回「x 軸方向へ平行移動」と違うのは、左右にいくら x の値をずらしても全ての x において $y = g(x)$ を満足する値がないということです。試しに図 49 の左図のグラフを左右に色々とずらしてみてください。すぐに絶対に一致しないことがわかりますよね？それは頂点が y 軸方向へずれているからです。

逆に頂点の x 座標は実は変わっていませんね。つまり $x = 1$ を中心とした左右の x とその y 座標の関係は第 1 式も第 2 式も変わらないのです。ただ、第 2 式において y 座標が 2 つ多いだけなのです。では改めて $y = g(x) = f(◯)$ において、本当は欲しい関係を作ってみましょう。

第 2 式		
$y = f(◯)$		
$x = 0$	$\longrightarrow$	$y = 3$
$x = 1$	$\longrightarrow$	$y = 2$
$x = 2$	$\longrightarrow$	$y = 3$
$x = 3$	$\longrightarrow$	$y = 6$

表 4: 実際に欲しい関係

$x = 0$ を $f(◯)$ に代入すると $f(0) = 1$ となってしまいます。でもこのときは $f(0) = 3$ となって欲しいわけです。さらに $x = 1$ を $f(◯)$ に代入すると $f(1) = 0$ となりますが、実際は $f(1) = 2$ になって欲しいわけです。

しかし、この願いは叶いません。なぜならば、$f(\ )$ の形がすでに決定してしまっているので、$f(\ )$ に数値を代入した結果はすでに決定済みだからです。ではどのようにしたらいいのでしょう？そろそろ図 49 から遠くなりましたので、もう一度表示してみましょう。

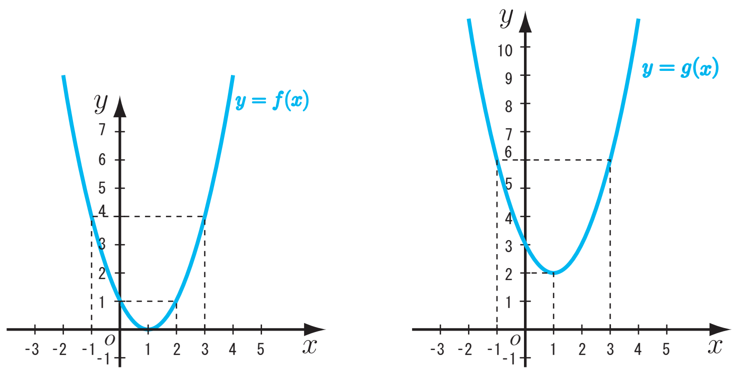

図 50: $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

第 2 式				
$y = f(◯)$				
入力値		出てくる値		欲しい値
$x = 0$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$\longrightarrow$	$y = 3$
$x = 1$	$\longrightarrow$	$y = 0$	$\longrightarrow$	$y = 2$
$x = 2$	$\longrightarrow$	$y = 1$	$\longrightarrow$	$y = 3$
$x = 3$	$\longrightarrow$	$y = 4$	$\longrightarrow$	$y = 6$

表 5: 必ず出力される値と欲しい値の関係

表 5 には、$f(\ )$ に値を代入したときに「絶対出てしまう値」と「欲しい値」の関係を示しました。つまり $f(\ )$ に各 x を代入したときの値よりも毎回 2 だけ大きい y の値が欲しいということがわかりました。ですから第 1 式が $y = f(x)$ に対して第 2 式は

$$y - 2 = f(x) \tag{53}$$

という式になります。頂点（$x = 1$）からの左右への開き具合は同じだけれども y の座標が 2 つだけ大きい関係を持つグラフを表す式です。きっと分かりにくいでしょうね…。ですから具体例を挙げて説明します。

$x = 0$ を代入してみてください。式 (53) の右辺は $f(0)$ ですから 1 という値になります。そのとき左辺も 1 にならなくてはなりません。第 1 式ですとそのままその値が y になりますが、式 (53) で表される第 2 式では左辺は $y - 2$ ですから $y - 2 = 1$ になるような y の値しか式 (53) を満たしません。そこで、そのような y は $y = f(x)$ を満たすような y よりも 2 つだけ大きい値になりますよね？だって $y - 2$ のように 2 引いた値が $f(x)$ にならなくてはならないわけですから。ですから式 (53) において $x = 0$ のときの y は $y = 3$ になります。

回りくどかったでしょうか。もう一つだけやってみます。$x = 1$ のとき右辺は $f(1) = 0$ となります。ですから左辺 $y - 2$ は $y - 2 = 0$ という等式により $y = 2$ と求まります。つまり $y = f(x)$ のときと比べて y の値が 2 だけ大きくなっています。

式 (53) を見て式 (50) と変わらないじゃん！と思った方もいらっしゃると思います。しかし、この後グラフの対称移動においてその効果がはっきりと発揮されます。是非 y 軸方向への平行移動は y の方（左辺）にその効果を表現してあげてください。ここでこのイメージをそのまま BLACK BOX で表現してみたいと思います。

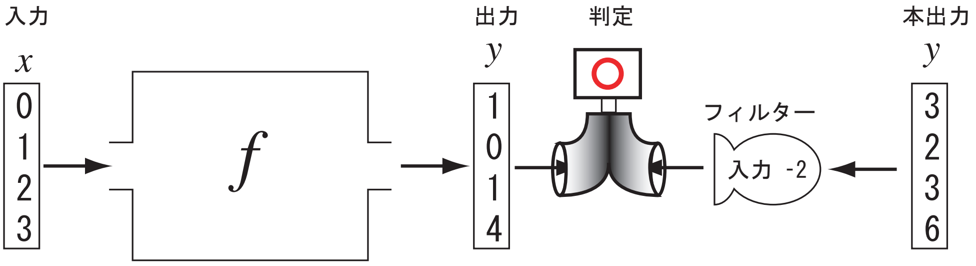

図 51: 本出力 y からフィルターで戻して判定

BLACK BOX の左から入力 x が入ります。機能は f のままですからその出力は当然 $y = f(x)$ と同じものとなります。その出力はとりあえず判定装置の左から入力させます。ところで一番右の本出力には、BLACK BOX の出力よりも 2 だけ大きい出力が並んでいます。それを左向きにフィルターに代入してフィルターが 2 を引いた結果を判定装置の右から代入します。その二つがあっていれば「○」を出力するようになっています。つまり、○になるような本出力 y はかならず BLACK BOX の出力よりもすべて 2 だけ大きい値になりますね。この一番左端の x と一番右端の本出力の y との関係が平行移動した後の関数の関係となります。少しは分かってもらえたでしょうか？

ではまとめます。「y 軸方向へ β だけ平行移動する場合、元の式が $y = f(x)$ であったら、移動後の式は $y - \beta = f(x)$ と表される」ということです。是非覚えてください。

1.10　グラフの対称移動

グラフの対称移動は実はとても簡単な考え方で求まります。しかしそれは当然関数という概念が理解できているという前提のもとでのお話です。ここまで頑張って読んで来た皆さんだったらきっと簡単に理解できるはずですよ！リラックスして読んでください。

1.10.1　x 軸対称

ある関数に限定したくないので、図 52 に示すような適当な関数 $y = f(x)$ を考えます。

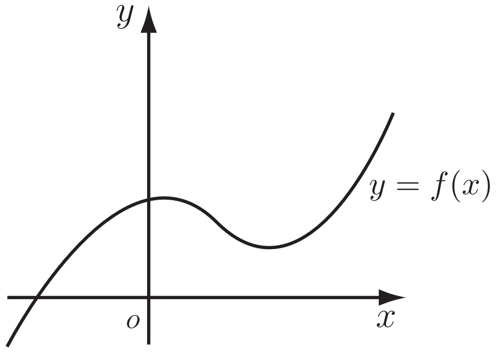

図 52: 関数 $y = f(x)$ のグラフ

このグラフを x 軸に対称移動したらどのようになるでしょうか？もちろん

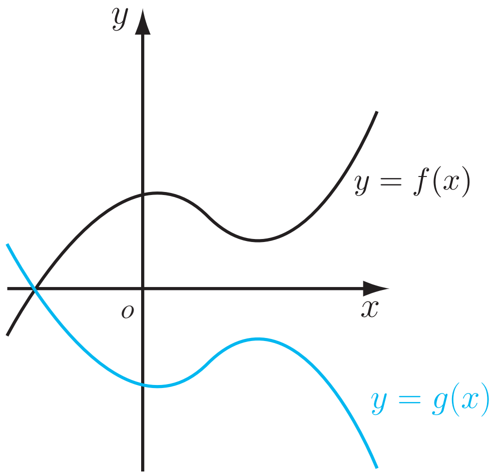

図 53: 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

図 53 の $y = g(x)$ のようになりますね。では、この $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はどのような関係になっているのでしょうか？ある $x = x_1$ について考えてみましょう。

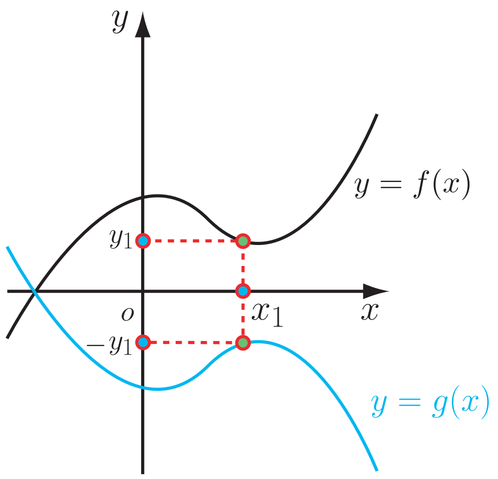

図 54: ある $x = x_1$ のときの各グラフ上の座標

$x = x_1$ のとき $y = f(x)$ のグラフでは $y_1 = f(x_1)$ となります。$y = g(x)$ は $y = f(x)$ と、ちょうど x 軸に対して対称なグラフですから、$-y_1 = g(x_1)$ となりますね。つまり入力 x が $x = x_1$ のときの出力 y の値は、$\pm$ が入れ替わった形で出てきます。

　では、この $y = f(x)$ のグラフを x 軸に対称移動した $y = g(x)$ を $y = f(x)$ の式を利用して表せないでしょうか？それがこのセクションの狙いです。

もし $y = g(x)$ の $g(x)$ というグラフの形を表す部分を $f(x)$ に変えてしまうと、$y = g(x) = f(x)$ となり、x に何を代入しても当然 $y = f(x)$ と同じ値になってしまいますね。でも欲しい $y = g(x)$ の値は単に $y = f(x)$ の y の値を -1 倍したいだけですから、このように考えればいいわけです。

$$-y = f(x) \tag{54}$$

式 (54) が語っている内容は分かりますか?右辺をご覧ください。$f(x)$ ですね。つまり右辺に関しては $y = f(x)$ と同じ値が出るわけです。

では左辺をご覧ください。$-y$ になっています。つまり y そのままではもちろん $y = f(x)$ となってしまいますが、$-y$ とすることにより、もとの $y = f(x)$ の y とちょうど $\pm$ が反転した y だけが式 (54) を満たすわけです。

例を挙げてもう一度同じ説明をしますね。$x = 1$ のとき $y = f(1) = 5$ となるとします。このときもちろん x 軸に対称移動したグラフ $y = g(x)$ では $g(1) = -5$ となって欲しいのです。だから、$y = g(x)$ の式を $-y = f(x)$ とすると右辺は $f(1) = 5$ だから式全体は $-y = 5$ となりそれを満たすような y、つまり $y = f(x)$ の y とちょうど $\pm$ が反転した y が得られるというわけです。

わかりにくい場合は違う説明を考えます。ゲストブックに書き込むか直接メールをください。

では、これを恒例となった BLACK BOX で考えてみましょう。

$$y = x^2 - 2x + 1 \tag{55}$$

式を今までお世話になった式 (55) を利用して考えます。

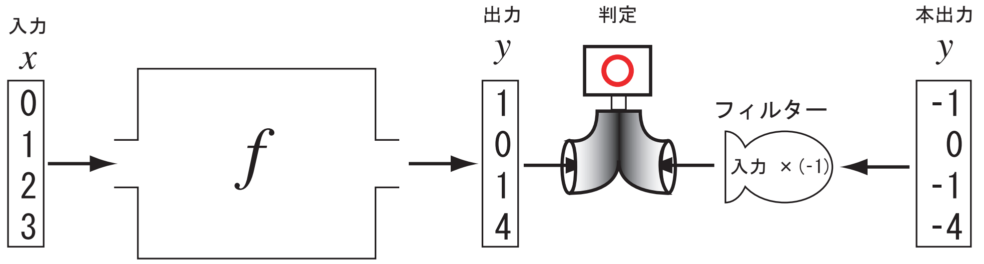

図 55: 本出力 y からフィルターで戻して判定

入力 x による関数の出力 y は $f(x)$ と同じです。その出力は比較判定装置に左から入力しておきます。そして本出力 y を -1 倍したものをまた比較判定装置に右から代入します。その 2 値が同じになるときだけ判定が〇になるので、本出力はちょうど関数の出力値の $\pm$ が反転したものになるというわけです。

折角ですから、式 (55) を x 軸に対して対称移動したグラフとそのときの式を求めてみましょう。

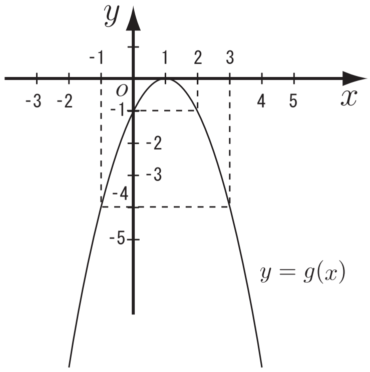

図 56: $y = f(x)$ を x 軸に対称移動

式は元の式が $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ ですから $y = g(x)$ と表される x と y の関係は

$$\begin{aligned} -y &= f(x) && (56) \\ y &= -f(x) \\ &= -\{x^2 - 2x + 1\} \\ &= -x^2 + 2x - 1 && (57) \end{aligned}$$

となります。式 (56) さえ出来たらあとはグラフを確認しなくてもすぐに式 (57) が求まりますね。とても速いですし、何より間違わずに簡単に求まります。この程度だったら良いんですが、もっと難しくなると途端にこの考え方は強力な力を発揮しますよ！

まとめますと、x 軸対称と言われたら、元の式の y を $-y$ に変更してやれば終了！ということです。

1.10.2 y 軸対称

今回も「x 軸に対して対称移動」の時に使用したグラフを使います。

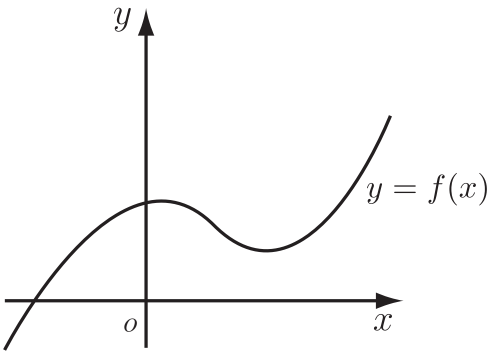

図 57: 関数 $y = f(x)$ のグラフ

図 57 のグラフを y 軸に対して対称移動すると図 58 のようになりますね。

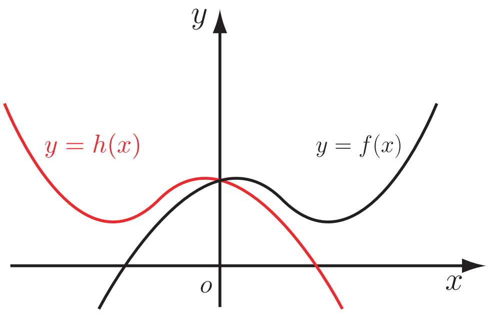

図 58: 関数 y 軸対称のグラフ

ではこの $y = h(x)$ を $y = f(x)$ の式を使って表してみましょう。そのためには $y = h(x)$ と $y = f(x)$ の関係を調べなくてはなりませんね。そこで y 軸対称という特徴を表すような点に注目して図 59 のように x_1、$-x_1$、y_1 を決めてみます。

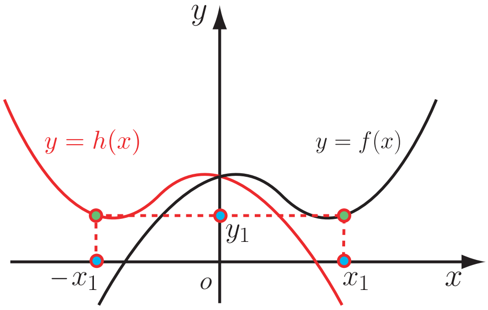

図 59: 特徴的な点

今回は y 軸に対称に移動していますから、$f(x)$ に x_1 を代入した $f(x_1)$ と $h(x)$ に $-x_1$ を代入した $h(-x_1)$ が同じ出力 y_1 になっています。

ここで $h(x)$ を $f(x)$ で表してみたいのですが、もちろん $y = h(x) = f(x)$ とは書けません。ですがこの辺まで理解してきた皆さんは、もう簡単に気付けるようになってますよね？$y = h(x)$ のグラフは、$-x_1$ を入れたときちょうど $f(x)$ に x_1 を入れた $f(x_1)$ と同じ値になって欲しいグラフです。ですから $h(x)$ を $f(\ )$ の形で表すためには

$$y = h(x) = f(-x) \tag{58}$$

と置けばよいわけです。まず $f(\ )$ に値を入力する前に -1 倍しておけばちょうどグラフが y 軸に対して対称に移動したものになります。分かりますか？

例えば $x = 1$ を $f(x)$ に代入したときに $f(1) = 2$ になるとしましょう。そうすると $y = f(-x)$ で表されるグラフにおいて、同じ出力 $y = 2$ になるためには $f(\ )$ の中身が 1 にならなくてはならないわけです。しかし当然 $x = 1$ を代入すると $f(-1)$ になって $f(\ )$ に -1 が代入されてしまいますので違う値が出力されてしまいますよね。どうすればいいでしょう…。もちろん $x = -1$ を代入すればいいですよね？

つまり、$f(-x)$ とは $f(x)$ の x がちょうど $\pm$ 反転したものを入れたとき値が等しくなる点の集合なのです。この辺まで来るとわざわざ BLACK BOX で表さなくても十分理解できるでしょうか？…でも、念のために考えておきましょうか？

$$y = x^2 - 2x + 1 \tag{59}$$

もう何度目か分かりませんが、また式 (59) にお世話になります。このグラフと、そして y 軸に対して対称移動したグラフは図 60 に示します。

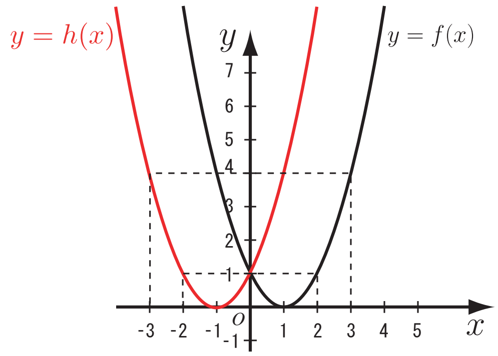

図 60: y 軸対称の関係

この対称移動後の $y=h(x)$ は図 61 のような BLACK BOX で表すことができます。

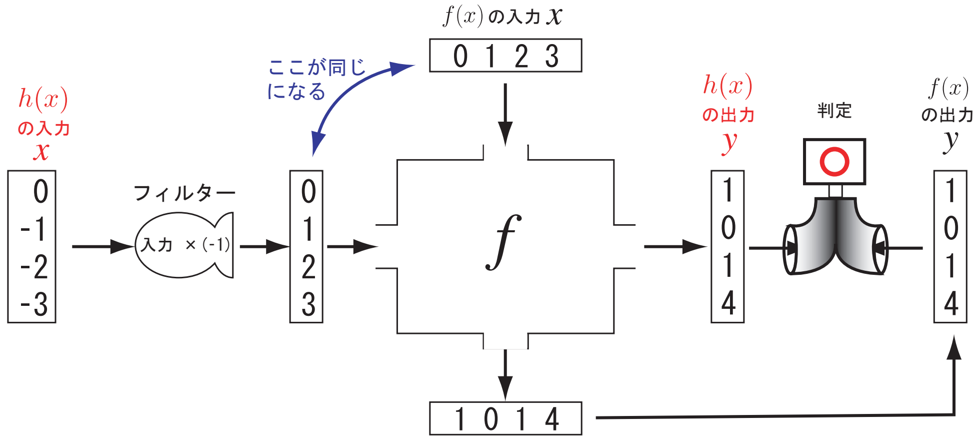

図 61: x の入力の前にフィルターをかけて -1 倍

ちょっと複雑な図になってしまったので説明しますね。本来の $f(x)$ の入力は BLACK BOX の上からの縦の入力になります。そのときの出力 y は下に出ます。図のように、判定装置の右に回して、判定装置の右から入力します。

それに対して、BLACK BOX の左から $h(x)$ の入力 x を入れます。今回は $f(x)$ の方で入力する x とちょうど $\pm$ が反転した x を入力します。まずフィルターを介して -1 倍されてしまうので、BLACK BOX への入力は $f(x)$ の x と同じものになります。だから出力も $f(x)$ と同じものが BLACK BOX の右から出ていますね。それを判定装置に…かけるまでもなくすぐに一致していることが分かります。

つまり、フィルタの前にはちょうど $f(x)$ の x が $\pm$ 反転した x を入力したときにだけ判定装置が○になるわけですね。これで y 軸対称のグラフを表す式が一発で表現できるようになったわけです。$y=f(x)$ を y 軸に対称移動させたグラフを表す式は

$$y=f(-x) \tag{60}$$

となります。

折角ですから、式 (59) を y 軸に対して対称移動したグラフとそのときの式を求めてみましょう。

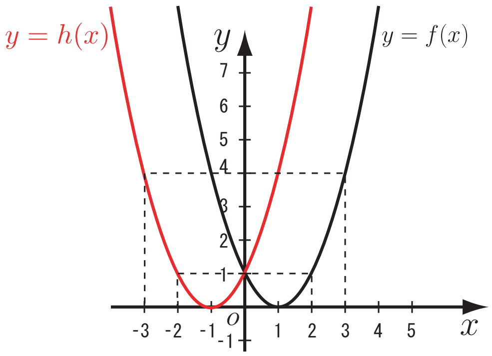

図 62: $y = f(x)$ を y 軸に対称移動

式は元の式が $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ ですから $y = h(x)$ と表される x と y の関係は

$$\begin{aligned} y &= f(-x) \qquad (61) \\ &= (-x)^2 - 2(-x) + 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 \qquad (62) \end{aligned}$$

グラフを書かなくても一発で求まりますね。

まとめますと、y 軸対称と言われたら、元の式の x を $-x$ に変更してやれば終了！ということです。ちゃんと意味を考えてからやってくださいね。私はいつも図 58 のような適当なグラフを描いてこの式を導くようにしています。10 秒程度で出来ますし。記憶に頼らないというのが、私の中の鉄則です。全ては原理的なイメージから…。

1.10.3　原点対称

実は x 軸対称移動と y 軸対称移動さえわかっていれば、この原点対称移動というのはすぐに理解することができます。なぜならば、原点対称移動というのは、x 軸対称移動と y 軸対称移動のどちらも同時にしたグラフだからです。

まずは x 軸対称移動と y 軸対称移動でもやったように、どれとは特定できないような一般的な関数に関して原点対称のグラフを考えてみましょう。図 63 のように適当な関数 $y = f(x)$ を考えます。

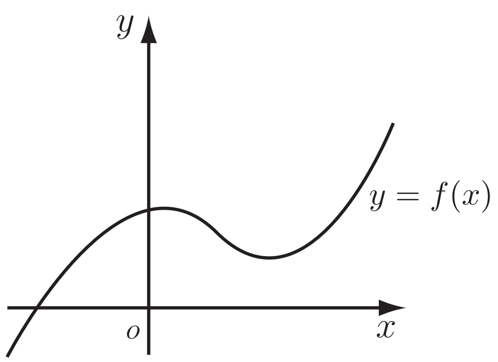

図 63: 関数 $y = f(x)$ のグラフ

そしてもう分かりますよね。このグラフを x 軸に対称移動したら

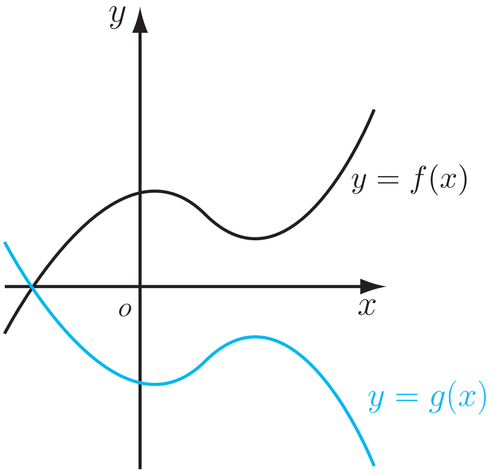

図 64: 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフ

となります。この $y = g(x)$ のグラフは x 軸に対して対称移動のページでもやりましたからサクッと解いちゃいますよ！

$$-y = f(x) \tag{63}$$

では、このグラフ $-y = f(x)$ をさらに y 軸に対称移動させるとどうなるでしょうか？

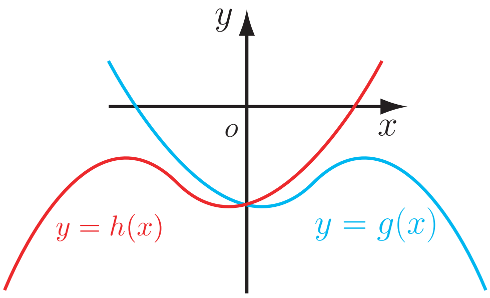

図 65: 関数 $y = g(x)$ と $y = h(x)$ のグラフ

もちろん一瞬でわかりますね。図 65 のようになります。ではこの $y = h(x)$ はどのように表されるのでしょうか？$y = g(x)$ は式 (63) より $-y = f(x)$ と表されていますので

$$-y = f(-x) \tag{64}$$

となります。y 軸に対称移動ですから $y = g(x)$ の x を $-x$ に変えただけです。もともと $y = g(x)$ が $-y = f(x)$ と表されていたので、その x を $-x$ に変えると $-y = f(-x)$ となりますね。ですから、求めるグラフを表す式は、式 (64) を $y =$ に変形して

$$y = -f(-x) \tag{65}$$

となります。（別に敢えて $y =\cdots$ の形に変形しなくてもいいんですけど、気持ちの問題ですね…。）もとの $y = f(x)$ と $-y = f(-x)$ のグラフを図 66 に示してみます。

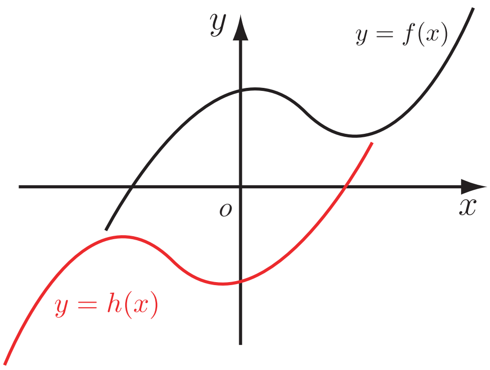

図 66: 関数 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ のグラフ

では例のごとく

$$y = f(x) = x^2 - 2x + 1 \tag{66}$$

に登場してもらいましょう。グラフは図 67 のようになります。

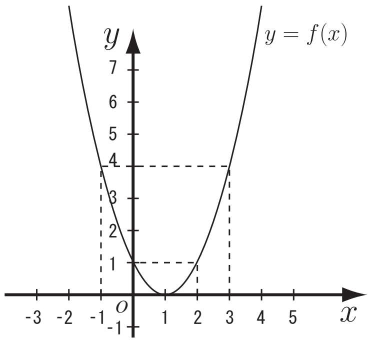

図 67: $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のグラフ

ではこれを原点に対して対称移動してみましょう。さきほども申し上げましたように、原点対称とは x 軸対称移動と y 軸対称移動を組み合わせたグラフです。ではその移動をまとめて図 68 に示します。

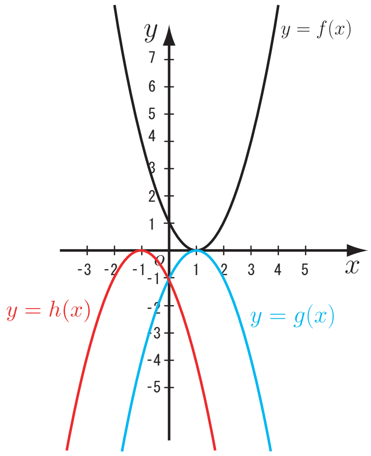

図 68: 原点対称 $y = h(x)$ のグラフ

$y = f(x)$ を原点に対して対称移動させると式 (64) から $-y = f(-x)$ で表されるんでしたね。ですから、$y = f(x)$ が $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ のとき、この $y = f(x)$ を原点に対して対称移動したグラフ $y = h(x)$ を表す式は

$$\begin{aligned}
-y &= f(-x) \\
y &= -f(-x) \\
y &= -\{(-x)^2 - 2(-x) + 1\} \qquad (67) \\
y &= -\{x^2 + 2x + 1\} \\
y &= -x^2 - 2x - 1 \qquad (68)
\end{aligned}$$

となります。ですがこれを求めるときは本当は図 68 のようなものは描かずに適当に関数 $y = f(x)$ を図 63 のように決めて、そのグラフを原点に対して対称移動させると $y = f(x)$ が $-y = f(-x)$ になることを確認し、そのあとで式 (67) のように式上で変形させるのが最も速くそして確実な解法となります。ぜひマスターしてください。

「原点対称と言われたら x 軸対称と y 軸対称のどちらも行ったもので元の関数が $y = f(x)$ の場合原点対称移動したグラフを表す式は $-y = f(-x)$ となる。」ということです。

1.10.4　$y = \alpha$ について対称移動

ここから最終仕上げに入ります。かなり一般化して理解できるようになってきたと思いますので、もう一つレベルアップして、ほとんどの対称移動系統の問題を即答できる解法を身につけましょう。

では、$y = \alpha$ に関して対称移動について考えていきたいと思います。この場合 α は「$+$」でも「$-$」でもどちらでも構わないのですが、わかりやすいようにとりあえず「$+$」扱いで解いていきます。もちろん出来上がった式においては $\pm$ のどちらでも対応しています。とりあえず今までと同様に一般化した関数 $y = f(x)$ を考えてみましょう。

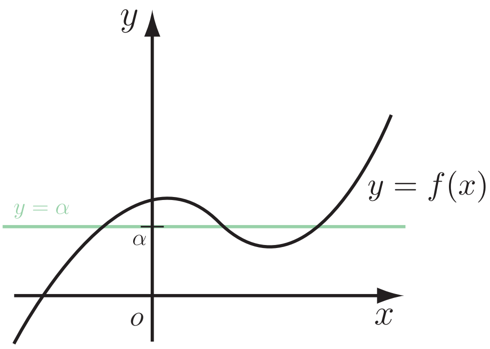

図 69: 関数 $y = f(x)$ のグラフ

図 69 中には $y = \alpha$ である対称軸も示してあります。さてこの $y = \alpha$ という対称軸に対して対称移動するとどのようなグラフになるでしょうか？

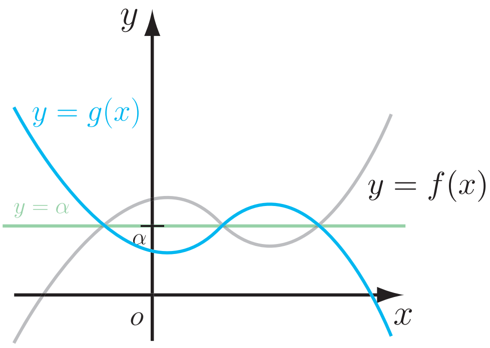

図 70: 関数 $y = f(x)$ を $y = \alpha$ に対して対称移動

すぐにわかりますね。図 70 中の $y = g(x)$ のようになります。ではこれを式で表すにはどうしたらいいでしょうか？

今まで学んできたのは、「x 軸方向に平行移動」「y 軸方向に平行移動」という 2 つの平行移動と「x 軸に対称移動」「y 軸に対称移動」「原点に対称移動」の 3 つの対称移動でした。これらを組み合わせると今回の「$y = \alpha$ に関して対称移動」が解けるようになります。では考えて見て下さい。

よくある惜しい間違いが次のようなものです。

1. x 軸に対して対称移動
2. 次に y 方向へ α だけ平行移動

どうでしょう？このように考えませんでしたか？でも残念ながらこれは不正解です。では実際にやってみましょう。まずは元のグラフ $y = f(x)$ を x 軸に対して対称移動させます。

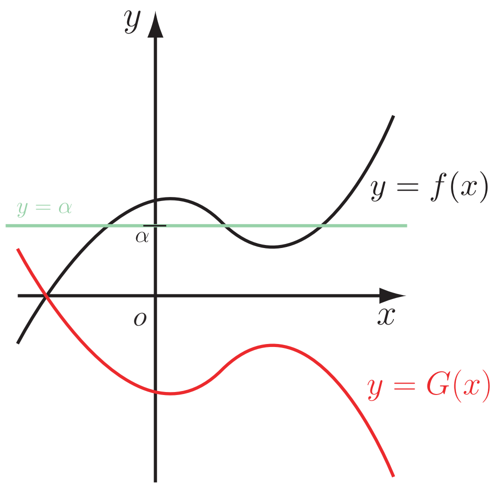

図 71: 関数 $y = f(x)$ を x 軸に対して対称移動

ではこの図 71 中の $y = G(x)$ を y 軸方向へ α だけ平行移動してみましょう。

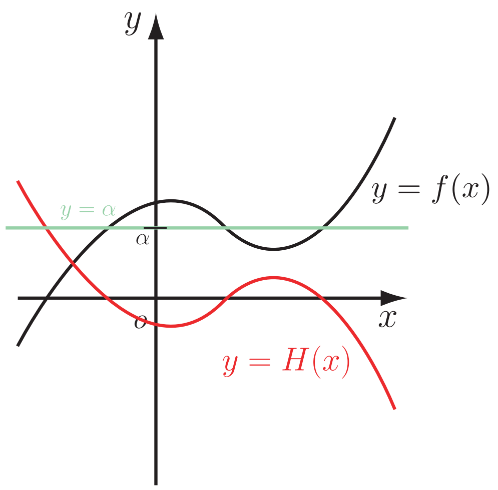

図 72: 関数 $y = G(x)$ を y 軸方向へ α だけ平行移動

どうですか？この $y = H(x)$ と図 70 の $y = g(x)$ との違いがわかりますか？折角ですから図 72 に $y = g(x)$ も重ねてみましょう。

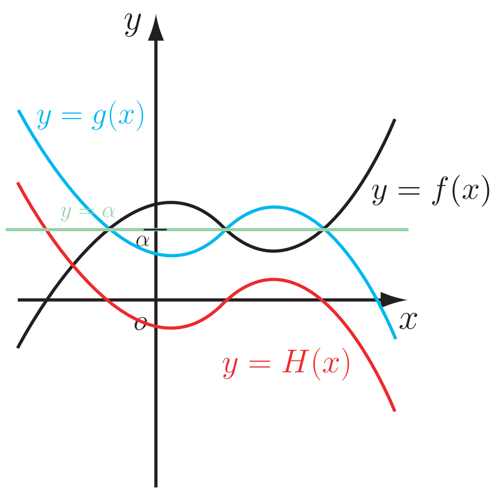

図 73: 関数 $y = H(x)$ と $y = g(x)$ との比較

全然違いますね。$y = H(x)$ と $y = g(x)$ が重ならないため、ダメです。では一体どうしたらいいのでしょうか？

$y=\alpha$ に対して対称移動とよく似ているのは x 軸対称ですよね？しかし当然我々は x 軸における対称移動しか学んでいません。だったら、対称軸を x 軸に重ね合わせてやれば良いのです。つまり対称軸 $y=\alpha$ を $y=f(x)$ のグラフごと、x 軸に重ね合わせてあげると今まで学んできたことが使えると思いませんか？

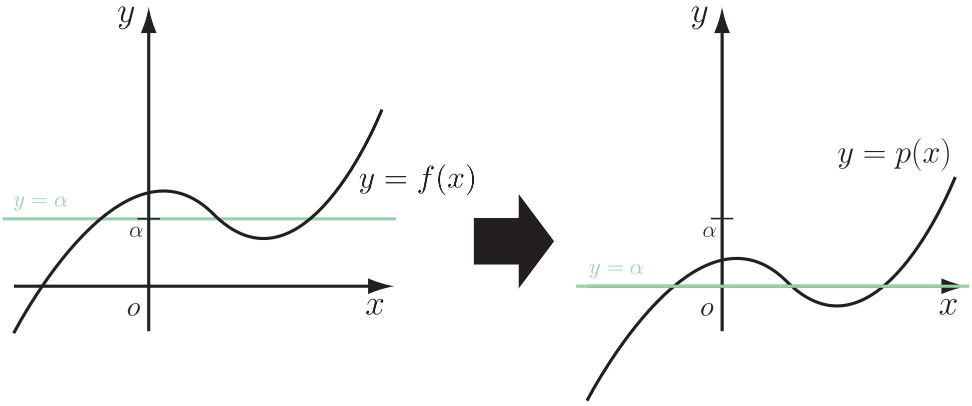

図 74: $y=f(x)$ ごと対称軸を x 軸に重ねる

図 74 の右図は $y=f(x)$ を対称軸と一緒に y 軸負方向へ α だけ下げました。ここで $y=p(x)$ を x 軸に対して対称移動してみましょう。

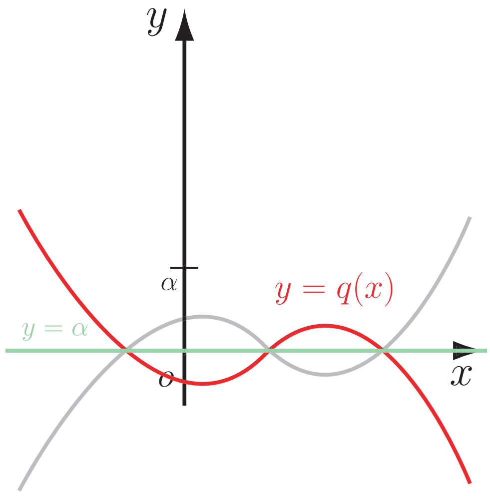

図 75: 関数 $y=p(x)$ を x 軸に対して対称移動

図 75 のように $y=q(x)$ となりました。これで終了ではありませんね。対称軸ごと x 軸と重ねているので、対称軸と関数を元の位置に戻さなくてはなりません。では対称軸と関数 $y=q(x)$ を y 軸方向へ α だけ平行移動してあげましょう。

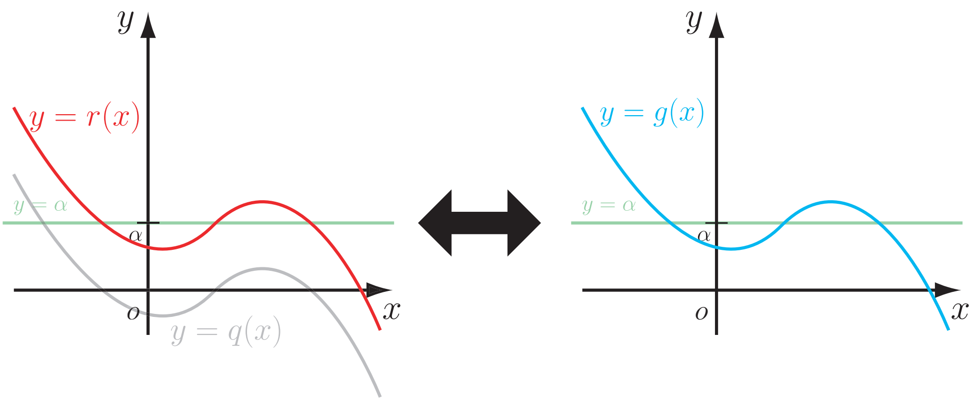

図 76: 対称軸と関数 $y=q(x)$ を元の位置へ

図 76 の左辺が $y = q(x)$ を y 軸方向へ α だけ平行移動して $y = r(x)$ となった図で、図 76 の右辺は図 70 と同様に最初の関数を $y = \alpha$ に対して対称移動した図です。見比べると、$y = g(x)$ と $y = r(x)$ が同じグラフであることが一目でわかりますね。

今まで行ったことを一度まとめて、そこから式上で表現してみましょう。

1. 対称軸を x 軸に重なるように平行移動
2. x 軸に対して対称移動
3. 対称軸と関数を元の位置へ戻す

この作業を式で表すと、元の関数は $y = f(x)$ ですから

$$y + \alpha = f(x) \tag{69}$$
$$-y + \alpha = f(x) \tag{70}$$
$$-(y - \alpha) + \alpha = f(x) \tag{71}$$

式 (69) は x 軸に重ねる平行移動を表します。式 (70) は x 軸に対して対称移動を、そして式 (71) は対称軸を元の位置に戻すことを意味します。

ここで式 (71) を「$y =$」の形にしてみましょう。

$$\begin{aligned} -(y - \alpha) + \alpha &= f(x) \\ -y + 2\alpha &= f(x) \\ y &= -f(x) + 2\alpha \end{aligned} \tag{72}$$

遂に求まりましたね。つまり $y = \alpha$ に関して対称移動とは元の関数を $y = f(x)$ としたときに $y = -f(x)+2\alpha$ を解くことに他ならないわけです。(もちろん私は極力暗記することを避けるため、式 (69)〜(71) を毎回作りますが…。)

では、毎回恒例の $y = x^2 - 2x + 1$ を $y = 2$ について対称移動させてみましょうか？ではまず適当に関数を描いて…というのはさすがに上でやったので、わかりますよね。それから x 軸に対称軸を移動させ、x 軸回転させ、そして対称軸を元に戻す。その作業を式上で表現すると

$$\begin{aligned} y + 2 &= f(x) \\ -y + 2 &= f(x) \\ -(y - 2) + 2 &= f(x) \\ y &= -f(x) + 4 \end{aligned} \tag{73}$$

ここで $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ですからそれを式 (73) に代入して

$$\begin{aligned} y &= -f(x) + 4 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 4 \\ &= -x^2 + 2x + 3 \end{aligned} \tag{74}$$

となります。これを平方完成してみましょう。

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x^2 - 2x) + 3 \\ &= -(x - 1)^2 + 4 \end{aligned} \tag{75}$$

この式で本当に $y=x^2-2x+1$ が $y=2$ に関して対称移動したグラフを表せているのか、実際に $y=x^2-2x+1$ を $y=2$ に関して対称移動してみて検証してみましょう。

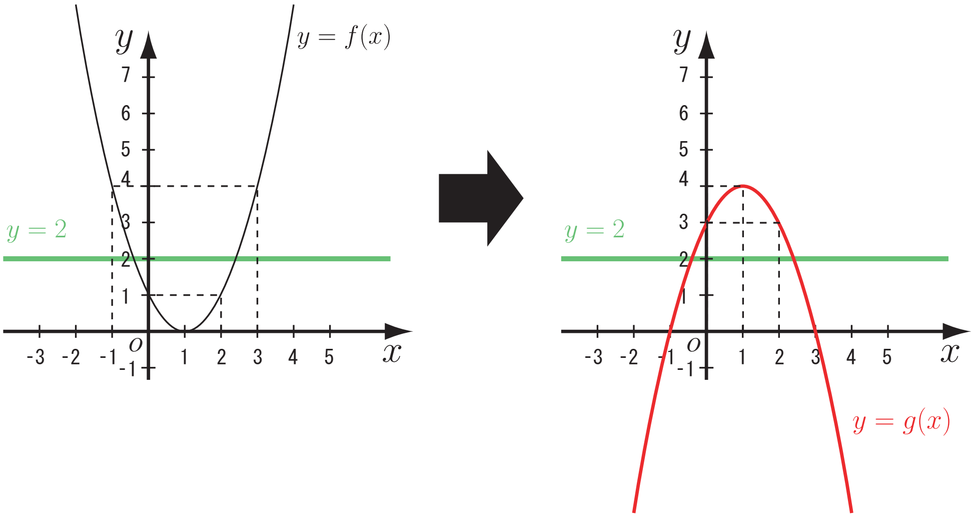

図 77: $y=x^2-2x+1$ を $y=2$ に関して対称移動

式 (75) で示されたように頂点が (1, 4) で、上に凸のグラフになっていますね！これでちゃんと求まることが分かっていただけたでしょうか？

つまり「元の関数を $y=f(x)$ としたとき $y=\alpha$ に関して対称移動したグラフを表す式は $y=-f(x)+2\alpha$ となる」ということです。式を暗記するのではなく、求め方を覚えて瞬時に式を作り出してしまう…それが能力です。

1.10.5 $x=\beta$ について対称移動

ここまで来ると、この「$x=\beta$ に関して対称移動」や次の「$(x,y)=(\alpha,\beta)$ に関して対称移動」なんかももう見当がついていることだと思います。それほど説明も必要ないと思いますので、考え方とその結果だけを示しますね。一番下にちょっとした式変形時のコツをお教えします。これがわかると実はもっと簡単に式が作成できます。

$x=\beta$ に関して対称移動の場合、対称軸である $x=\beta$ と似た軸は y 軸です。そこで我々が知っているのは平行移動と、x 軸、y 軸対称移動だけですから、「$y=\alpha$ に関する対称移動」のときと同様に、まずは対称軸 $x=\beta$ を y 軸に重ねます。そして y 軸に関して対称移動したあとで、また対称軸ごと関数をもとの位置へ平行移動して戻します。これで終了です。作業をまとめると

1. 対称軸を y 軸に重ねる（関数もともに移動）
2. y 軸対称移動
3. 対称軸と関数とともに元の位置へ戻す

まずは一般的な関数 $y=f(x)$ でその様子を見てみましょうか。

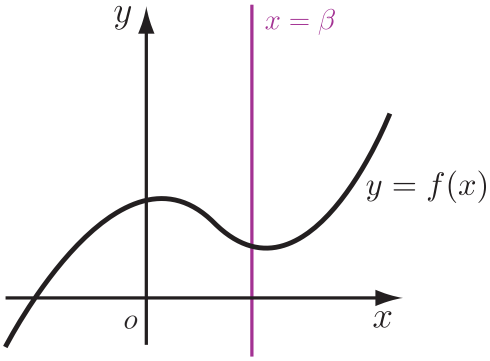

図 78: 一般的な $y=f(x)$ と対称軸 $x=\beta$

この $y=f(x)$ と対称軸 $x=\beta$ をともに x 軸の負方向へ β だけ平行移動します。

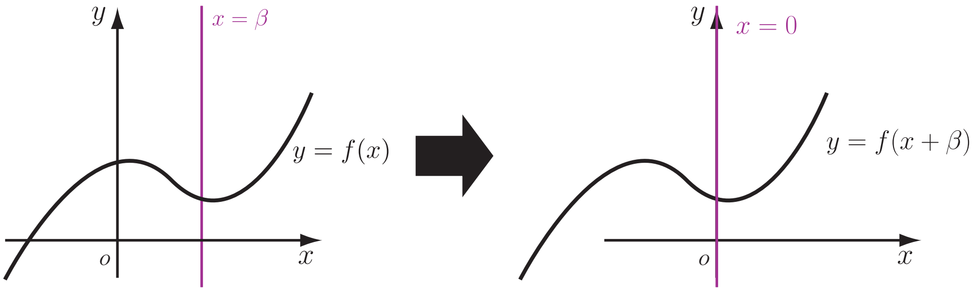

図 79: x 軸負方向へ β 平行移動

関数を y 軸に関して対称移動してみます。

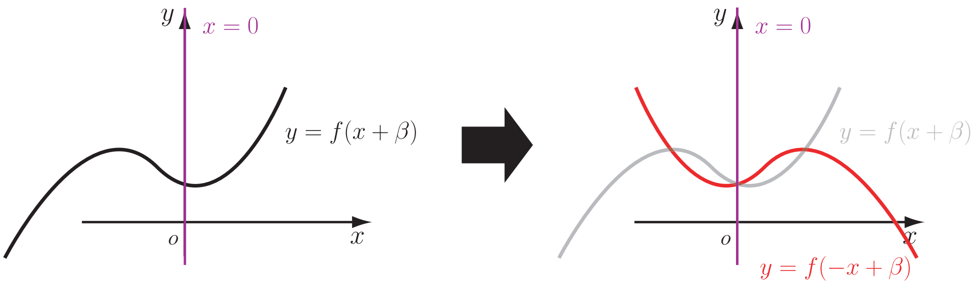

図 80: y 軸に関して対称移動

最後に対称軸と関数をもとに戻したら終わりです。x 軸方向へ β だけ平行移動しましょう。

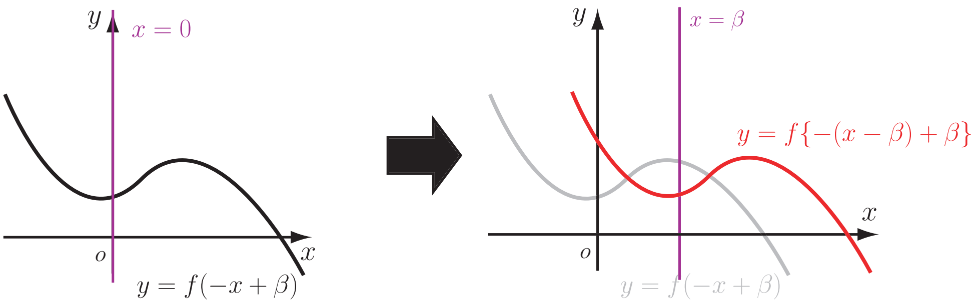

図 81: y 軸に関して対称移動

ではこれらを式にしてみましょう。

$$y=f(x+\beta) \tag{76}$$
$$y=f(-x+\beta) \tag{77}$$
$$y=f\{-(x-\beta)+\beta\} \tag{78}$$
$$y=f(-x+2\beta) \tag{79}$$

グラフ中にも同様の式を入れていますので、それぞれ確認してみてください。

$y = x^2 - 2x + 1$ という具体的な関数を $x = 2$ について対称移動したグラフの図と式を考えて、どんな関数にも適用できるという確認をしておきます。

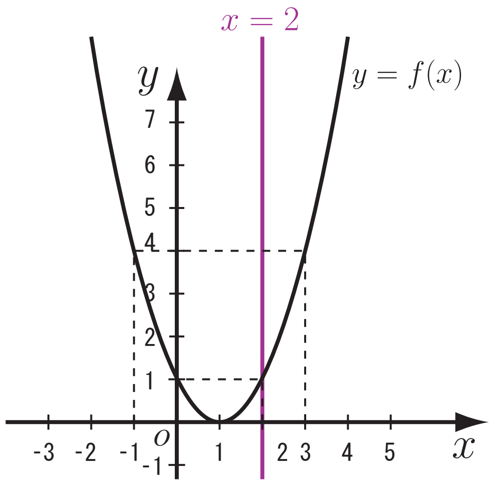

図 82: $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと対称軸 $x = 2$

この図 82 で表されたグラフを図 83 のように $x = 2$ に関して対称移動します。

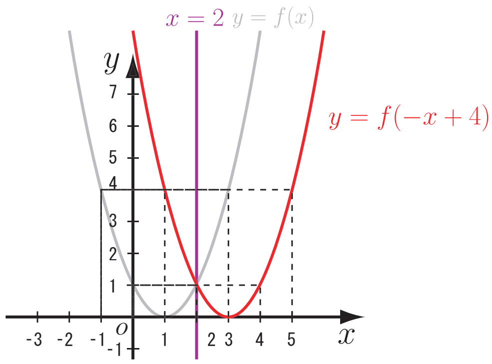

図 83: $x = 2$ に関して対称移動

出来上がったグラフの式は図 83 中でも示していますが、以下のような過程を経て

$$\begin{aligned} y &= f(x + 2) \\ y &= f(-x + 2) \\ y &= f\{-(x - 2) + 2\} \\ y &= f(-x + 4) \qquad (80) \end{aligned}$$

式 (80) のように $y = f(-x + 4)$ と表されます。この値を $y = x^2 - 2x + 1$ に当てはめてみますと

$$\begin{aligned} y &= f(-x + 4) \\ &= (-x + 4)^2 - 2(-x + 4) + 1 \\ &= x^2 - 8x + 16 + 2x - 8 + 1 \\ &= x^2 - 6x + 9 \qquad (81) \\ &= (x - 3)^2 \qquad (82) \end{aligned}$$

となります。式 (81) が x の降べきの順に並べた式で、それを平方完成したのが式 (82) になります。この式 (82) と図 83 を見比べると $y = f(x)$ を正しく $x = 2$ に関して対称移動した後のグラフを表していることが

分かりますね。

つまり、「$x=\beta$ に関して対称移動と言われたら、対称軸を y 軸にあわせ、そこで関数を y 軸に関して対称移動し、対称軸と関数を元の位置に戻したら終了」ということです。

最後にテクニックなんですが…もう一度一般的な関数 $y=f(x)$ を $x=\beta$ に関して対称移動する場合の式変形をみてください。

$$y = f(x+\beta) \tag{83}$$
$$y = f(-x+\beta) \tag{84}$$
$$y = f\{-(x-\beta)+\beta\} \tag{85}$$
$$y = f(-x+2\beta) \tag{86}$$

ここで式 (83) は絶対になくならない！ということと、その平行移動する方の変数（今回は x）にその後「ー」が付くということさえ覚えておけば、β は必ず 2 倍されますから、一般的な関数 $y=f(x)$ を $x=\beta$ に関して対称移動する場合

$$y = f(x)$$
$$y = f(x+\beta) \tag{87}$$
$$y = f(-x+2\beta) \tag{88}$$

と 2 つの式変形で求めることができます。私の場合は式 (87) を一度わざと書いて、何が（今回は x）どういう値（今回は β）で平行移動するのかを確かめてから一気に変形するようにしています。

1.10.6 $(x,y)=(\alpha,\beta)$ について対称移動

とうとう「関数」についての最後のページになりました。「除算」についてのテクニック的なものも紹介したいところですが、その前に「物理」や「化学」の説明の方を終わらせたいので、「数学」はここでしばらくお休みです。では早速「$(x,y)=(\alpha,\beta)$ について対称移動」をやりましょう…と言いたいところなんですが、もうコレ…わかりますよね？

当然お気づきでしょうが、これは $y=\beta$ に関して対称移動と $x=\alpha$ に関して対称移動を順次やれば終了です。ということはもうわざわざグラフ化する必要性すらないでしょう。（必要だったら言ってきて下さい。暇なときにグラフ化しておきます。）

$$y = f(x) \tag{89}$$

関数を式 (89) のように $y=f(x)$ だとすると求める「$(x,y)=(\alpha,\beta)$ について対称移動」したグラフは順を追って（皆さんは一度一般化した関数 $y=f(x)$ のグラフを書いて x と y のどちらが、どの方向へどれだけ平行移動するのかを確かめてからにしてくださいね。）

$$y = f(x)$$
$$y+\beta = f(x+\alpha) \tag{90}$$
$$-y+\beta = f(-x+\alpha) \tag{91}$$
$$-(y-\beta)+\beta = f\{-(x-\alpha)+\alpha\} \tag{92}$$
$$-y+2\beta = f(-x+2\alpha) \tag{93}$$
$$y = -f(-x+2\alpha)+2\beta \tag{94}$$

つまり $y = f(x)$ を $(x, y) = (\alpha, \beta)$ について対称移動したグラフは $y = -f(-x + 2\alpha) + 2\beta$ と書けるということです。もちろん 2 次関数であろうが 3 次関数であろうがすべての関数に関して適用できますので、あとは問題集などで解けることを確認してください。ここまで読んだ皆さんはきっと 1 つどころかいくつかレベルアップしているはずですよ！