

## 点と直線の距離

点と直線の距離を求める場合

- ：平面幾何的に解く。
- ：ベクトルを用いて解く。

がある。しかし、さらにもう一つ提案したい。それが と同様にベクトルを使う方法だが、内積を積極的に使用する方法である。

まず最初に直線の方程式を

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

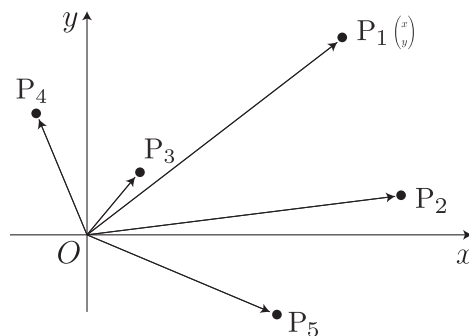
この式を以下のように変形してみる。

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -c \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、内積を縦ベクトル表記で記した。

つまり、 $ax + by$  は式 (2) のように、 $(a, b)$  と  $(x, y)$  の内積と考えることができる。ここで、当然式 (2) を満たす  $(x, y)$  は直線  $ax + by + c = 0$  上の点  $(x, y)$  のことであるが、一般的な点  $P(x, y)$  はどこでも良い。

どのPもすべて  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



そう考えると、本来、式 (2) の左辺だけ見ると、 $(x, y)$  はどこでも良い点  $P$  であり、それと  $(a, b)$  との内積が  $-c$  に限定される  $(x, y)$  が今回求める  $(x, y)$  であっただけである。(等式を立てたから限定されたということ。)つまり

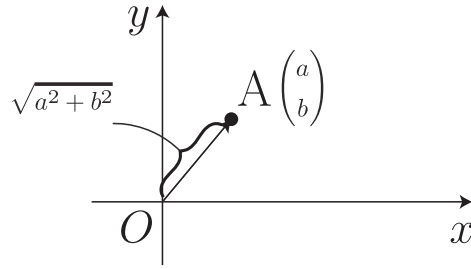
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

に表されている  $(x, y)$  は  $x - y$  平面内のあらゆる点  $(x, y)$  を示しているということを強調したかっただけである。そしてこの理解が今後の話に役に立つ。

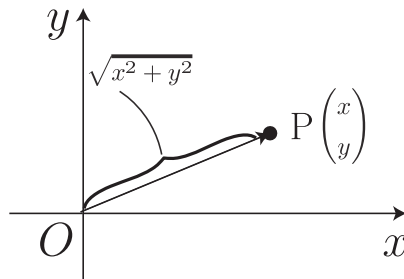
さて、ではもう少し式 (2) を解析してみよう。 $(a, b)$  とは、直線  $ax + by + c = 0$  の法線ベクトルである。点  $A$  を  $(a, b)$  とし、そのベクトルを  $\vec{a}$  とすると、その大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

これは図で示すと次のような意味になる。

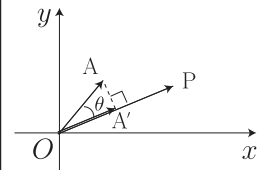
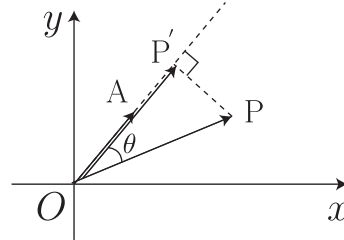
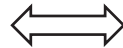
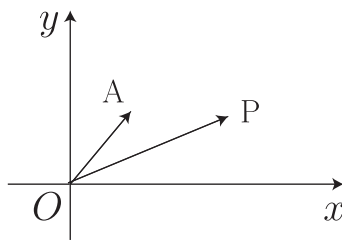


ここで、 $(x, y)$  は  $x-y$  平面内のどこでも良い点  $P(x, y)$  であるとする。そうすると、この  $\vec{OP}$  も先ほどの  $OA$  と同様に、 $\vec{p}$  と表現しておく。



となる。ここで、 $\vec{OA}$  と  $\vec{OP}$  の内積は、どちらかに正射影を落としたとき、その大きさ同士の積になる。もちろん正射影を落とされる基準となるベクトルは固定されている  $\vec{OA}$  の方が良いから、以下の図のようにイメージされる。

$\vec{OA}$  を  $\vec{OP}$  方向へ正射影を落とした場合は次のようになる。



内積は、基準となるベクトルの大きさ ( $= |\vec{OA}|$ ) と基準となるベクトルに落とした正射影ベクトルの大きさ ( $= |\vec{OP}'|$ ) の積であるから、

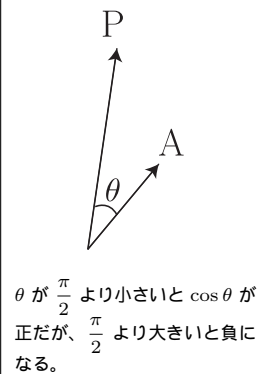
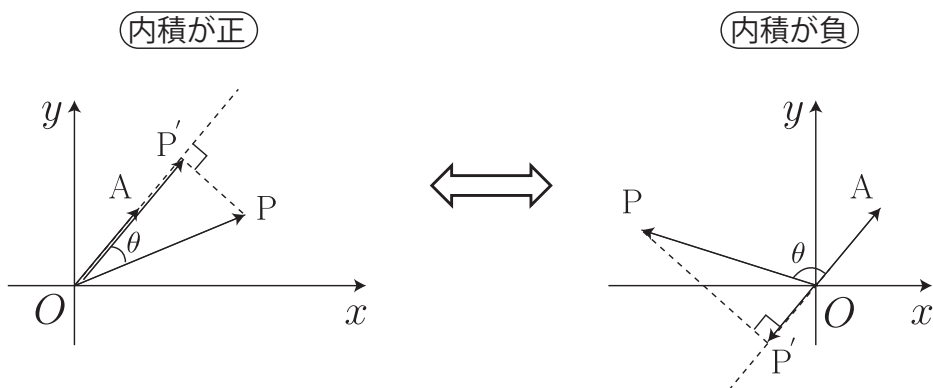
$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}'| \cos \theta = (\pm) |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cos \theta \quad (5)$$

+ や - は  $\cos \theta$  の値による。

となる。この式 (5) が述べている意味は今後とても重要になるので、もう一度説明しておく。ベクトルの内積は、2 ベクトルを同じ直線上に乗せて、その同じ直線上のベクトルの大きさ同士の積という意味を持つ。

ここで、式 (5) の値が  $-c$  になるのが式 (2) である。

ここまで言ったら当然気づくであろう。 $-c$  の値が正になるのか負になるのかは当然  $\cos \theta$  の値が正か負に依るのであり、 $\vec{OA}$  と  $\vec{OP}$  が同方向を向いていれば正、逆方向を向いていれば負になる。



それによって内積が正になるか、負になるかが決まる。

つまり再度書くが、式 (2) の  $-c$  が負なら逆方向で、 $c$  が正なら同方向を向いているということ、

$$\begin{cases} 0 < -c \\ -c < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c < 0 & : \text{同方向} \\ 0 < c & : \text{逆方向} \end{cases}$$

ということがわかる。この  $c$  を 2 ベクトルの方向情報と名付けておく。では、式 (2) で表した

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -c$$

という式から何がわかるのかというと、 $0 < -c$  とすると式 (5) の値は正となり、式 (2)、(5) より

$$\begin{aligned} |\vec{OA}| |\vec{OP}^{\perp}| &= -c \\ \sqrt{a^2 + b^2} |\vec{OP}^{\perp}| &= -c \\ |\vec{OP}^{\perp}| &= \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

となり、式 (6) を満たす点  $P(x, y)$  が集まったものが直線  $ax + by + c = 0$  ということが分かる。

1.  $(a, b)$  と  $(x, y)$  との内積が正で、大きさが  $|c|$  ということ。(普通にわかること)
2. 正射影ベクトルと基準ベクトルの大きさの積が  $|c|$ 。
3. 正射影ベクトルが  $(a, b)$  と同じ直線に乗るように落ちてくる点のうちで、さらに大きさが  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  となる点の集まりが、直線  $ax + by = c$  を満たす点  $P(x, y)$ 。

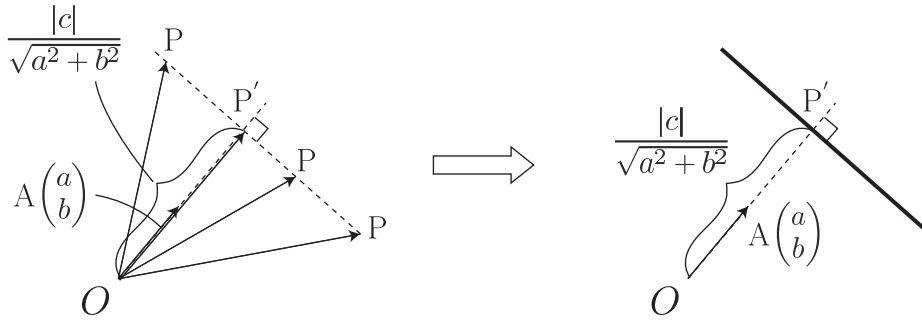
そして 2 ベクトルの方向情報により、実は式 (1) の  $ax + by + c = 0$  という式を見た瞬間に  $c$  が負だったら法線ベクトル  $(a, b)$  と直線が逆方向、 $c$  が正だったら法線ベクトル  $(a, b)$  と直線が同方向ということがわかるのである。

# 内積の拡張

まずは前節までの確認で、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -c \tag{7}$$

を満たす点の集合  $(x, y)$  は、点  $A(a, b)$  に落とした正射影ベクトルの大きさが  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  となる点の集まりで、それは直線になることを学んだ。ここでは簡単のために  $0 < -c$  としておこう。つまり、 $\vec{OP}$  の  $\vec{OA}$  向きの正射影ベクトルは  $\vec{OA}$  ベクトルと同じ向きである。



では、この話を発展させて

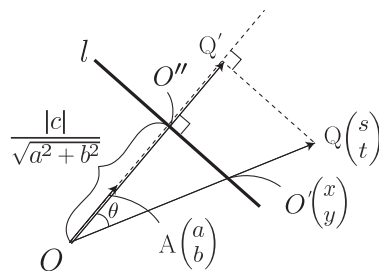
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = -c + p \tag{8}$$

となる場合を考えてみよう。ここで  $p$  は  $0 < p$  を満たすとする。式 (8) は  $(a, b)$  と  $(s, t)$  の内積が  $-c$  よりも  $p$  だけ増えたものであり、この  $p$  だけずれるという数値上の意味が、図形的にどのような意味を与えているのだろうか。後々のために式 (8) は

$$\begin{aligned} as + bt &= -c + p \\ as + bt + c &= p \end{aligned} \tag{9}$$

と書ける関係になることを覚えておいてもらいたい。さて、式 (8) は図形的には内積であるから、

右図のように表せるはずだ。ここで式 (7) を満たす部分は上図のような直線を表すとし、それを右図に示している。つまり式 (8) は点  $O'$  を  $O'(x, y)$  とすると

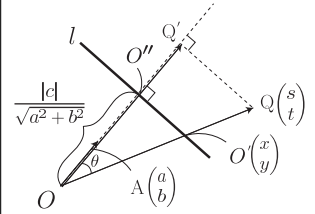


$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + (s - x) \\ y + (t - y) \end{pmatrix} &= -c + p \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s - x \\ t - y \end{pmatrix} &= -c + p \\ \vec{OA} \cdot \vec{OO'} + \vec{OA} \cdot \vec{O'Q} &= -c + p \end{aligned} \tag{10}$$

ここまで書けば、もう気付いた人もいよう。式 (10) の  $\vec{OA} \cdot \vec{OO'} = -c$  の部分は、直線  $l$  を満たす  $(x, y)$  の集合部分であり、したがって、式 (10) は

$$\vec{OA} \cdot \vec{O'Q} = p \quad (11)$$

という情報を伝えているとも解釈できる。これはもちろん  $\vec{O'Q}$  を  $\vec{OA}$  方向へ正射影を落としたベクトルの大きさと  $\vec{OA}$  の大きさとの積、つまり  $\vec{O''Q}$  と  $\vec{OA}$  の積を表している。



$$\begin{aligned} |\vec{OA}| |\vec{O''Q}| &= p \\ \sqrt{a^2 + b^2} |\vec{O''Q}| &= p \\ |\vec{O''Q}| &= \frac{p}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (12)$$

この式 (12) によって  $|\vec{O''Q}|$  が  $\frac{p}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  であることが分かる。つまり、 $p$  を  $\vec{OA}$  の大きさで割ったら、 $\vec{O''Q}$  の大きさが求まったわけである。これは、 $Q$  点から直線  $l$  に下した垂線の長さであるから、これを点  $Q$  から直線  $l$  までの距離つまり、点と直線の距離と言うのである。

ここで、式 (9) を思い出してもらいたい。式 (9) を式 (12) に代入すると、

$$|\vec{O''Q}| = \frac{as + bt + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (13)$$

と書ける。この式 (13) の分子に絶対値を付けると、おそらく点と直線の公式として教わっているものと同じ形であることが一目で分かるであろう。では、この式 (13) から分かることをひも解いて行こう。以下の式 (7) は、 $\vec{OA}$  との内積が  $-c$  になる点  $P(x, y)$  の集まりであった。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -c$$

この式を以下のように変形してみる。

$$ax + by + c = 0 \quad (14)$$

内積  $ax + by$  から、その内積が満たす値  $-c$  を引くことで 0 になるのは自明である。ここで、今度は式 (8) を考えてみる。

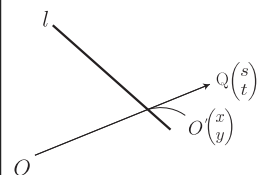
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = -c + p$$

という式は、 $-c$  は正としておいて  $p$  の正負はまだ考えないとして、これを式変形すると式 (9) のように

$$as + bt + c = p$$

と書ける。ここでこの点  $Q(s, t)$  を、直線  $OQ$  と直線  $l$  とが交わる点を  $O'(x, y)$  として、 $O$  と  $O'$  を用いて表現してみると、

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OO'} + \vec{O'Q} \\ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s-x \\ t-y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$



今  $Q$  を線分  $OO'$  に対して、 $O'$  より外に取っているが、 $p$  の値によっては内側のもも当然ある。そうすると、

となる。

式 (9) は

$$\begin{aligned}as + bt + c &= p \\ax + by + a(s - x) + b(t - y) + c &= p\end{aligned}\quad (16)$$

と書けるから、式 (14) の左辺の部分は 0 になってしまうので結局  $p$  とは  $\vec{O'A}$  と  $\vec{O'Q}$  との内積なのである。

つまりまとめると

$$as + bt + c \quad (17)$$

は直線  $OQ$  と  $ax + by + c = 0$  を満たす直線  $l$  との交点を  $O'$  として、 $\vec{O'Q}$  と  $\vec{O'A}$  との内積の値を表していたのである。したがって、その値を  $\sqrt{a^2 + b^2}$  で割ることは  $\vec{O'Q}$  の大きさを求めることであり、それは点  $Q$  から直線  $l$  に引いた点と直線の距離を求めることになるわけである。

しかし絶対値を付けていない式 (17) はまださらに情報を提供している。それは、 $\vec{O'Q}$  と  $\vec{O'A}$  との内積ということは、つまり  $\vec{O'Q}$  が  $\vec{O'A}$  と同じ方向を持っている場合は正、つまりそのときは点  $Q$  は交点  $O'$  より向こう側にあるのであり、負であれば、 $O'$  より手前、つまり直線より手前にあると分かるわけである。

## まとめ

$$ax + by + c = 0 \quad (18)$$

からわかることは

1. 式 (18) を満たす  $(x, y)$  は  $(a, b)$  ベクトル方向へ正射影を落とすとその大きさが  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  を満たす点であり、その集合は直線  $l$  になる。
2. 直線  $l$  に対して法線ベクトルのうちの一つは  $(a, b)$  であり、その大きさは  $\sqrt{a^2 + b^2}$  である。
3.  $-c$  は、法線ベクトル  $(a, b)$  と直線上の点  $P(x, y)$  との内積を表すので、 $c$  が負だったら、直線は  $O$  から見て法線ベクトル  $(a, b)$  が指す方向と同じ方向にあり、 $c$  が正だったら法線ベクトルと逆方向にある。

$$as + bt + c = p \quad (19)$$

4.  $(s, t)$  を点  $Q$  と決めると、直線  $OQ$  と  $ax + by + c = 0$  によって決まる直線  $l$  との交点を  $O'$  として、 $p$  は、 $\vec{O'Q}$  と  $\vec{O'A}$  との内積になる。
5.  $p$  を  $\sqrt{a^2 + b^2}$  で割った大きさは  $\vec{O'Q}$  の  $\vec{O'A}$  方向への正射影ベクトルの大きさなので、点  $Q$  から直線  $l$  への点と直線の距離になる。
6.  $p$  の符号は、正だったら  $\vec{O'Q}$  が  $\vec{O'A}$  と同じ向き、負だったら逆向きを表している。

以上のことが、瞬間にわかるようになったら、ベクトルに対する理解もかなり深まるだろう。