

# 目次

1	命題とは	2
2	必要条件・十分条件	2
3	必要条件・十分条件とベン図の関係	4
4	必要条件・十分条件ではまるトラップ	6

# 1 命題とは

命題とは「式や文章で表された事象において、正しいか正しくないかのどちらかが明確に決まるもの」のことです。

命題が正しいときには、その命題は真と言ひ、命題が正しくないときはその命題は偽と言ひます。

イメージできたでしょうか？ とりあえず例題で考えてみましょう！

条件  $p$  : 液体は牛乳である。  
条件  $q$  : 液体は白色である。

この条件  $p$  と条件  $q$  は

液体が牛乳ならば、液体は白色である

と言えますよね？ ですからこれらの関係を

$$p \rightarrow q \tag{1}$$

と書きます。もちろん式 (1) 中の「 $\rightarrow$ 」は「ならば」と読んでください。そうすると、「 $p$ ならば $q$ 」と読めますね。つまり「液体が牛乳ならば、液体は白色である」と同じ意味になります。

ではこの関係をベン図なるものを用いて示してみましょう！（ベン図とは集合を表す際にとっても便利な図のことです。）

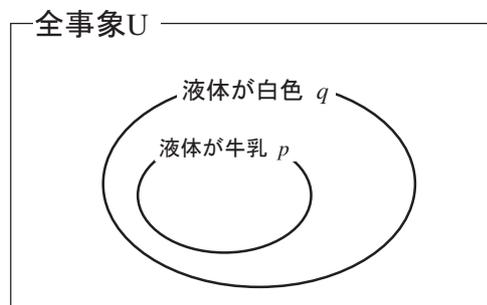


図 1: ベン図

式 (1) をベン図で表すと図 1 のようになります。液体が白色という集合の中に液体が牛乳が内包されています。

# 2 必要条件・十分条件

式 (1) のように、その命題が真のとき次のようなことが言えます。

- $p$  は  $q$  であるための十分条件
- $q$  は  $p$  であるための必要条件

実は私はこのことをよく理解していませんでした。だって、高校のとき先生が「難しいからこれはパターンで覚えておけばいいんだ！」なんて言うから、色んな場所で原理解こそ物事を理解するときの最短距離なんて言うておきながら未だに「パターン認識」という暗記に頼っていたんです。

でも世の中にある定理の中で、作った人もよくわからない(何も考えないで作った)定理なんてあるはずがないんですよね。だったら、上の必要条件や十分条件も意味があって作ったはず...ということで少々原理分析をしてみました。そうすると、「必要条件」や「十分条件」という単語がイメージによる原理解を妨げていると感じたのです。そこで、その端的に表された表現である「必要条件」や「十分条件」に少々冗長的ですが少し言葉を付け加えさせてもらいます。では再定義しますね。

- $p$  は  $q$  であるための**それだけ決まれば**十分条件
- $q$  は  $p$  であるための**せめて最低**必要条件

私が再定義するとこのような形になりました。ではご説明いたします。

液体が牛乳である → 液体が白色である

この命題は「真」です。ですから、この命題が「真」であるという条件のもとで以下のことが言えます。

「液体が白色である」ことは、「液体が牛乳である」ことの**せめて最低**必要条件です。

これはどういうことでしょうか？本当に**液体が牛乳であることを確認するためには**、もちろん**牛から得られることや、味、香り**等のその他の要素も必要なはずですが。ですから「液体が白色である」だけだと**牛乳だとは限りません**。しかし「液体が牛乳である」ためには**せめて最低**「液体が白色である」必要があるんです。だって「**緑色の液体**」だったら瞬間に牛乳じゃないと判断できるでしょ？

だから「液体が白色である」ことは「液体が牛乳である」ことの**せめて最低**必要条件になるわけです。

さきほどは実は軽く触れてはいるのですが、

液体が牛乳である → 液体が白色である

の命題が「真」である条件下でもう一つ言えることがあります。それが

「液体が牛乳である」ことは、「液体が白色である」ことの**それだけ決まれば**十分条件です。

だって「液体が牛乳」と決まれば、誰が何と言おうと**絶対に**「液体は白色」ですよ？だから「液体が白色である」ためには「液体が牛乳である」とさえ決まれば良いわけです。つまり「液体が牛乳である」ことは、「液体が白色である」ことの**それだけ決まれば**十分条件だと言えるわけです。キーワードは次の二つです。

- **せめて最低**必要条件
- **それだけ決まれば**十分条件

このキーワードをしっかりと意識しておいてください。

ところで実は私が理解してなかったのはここなんです。つまり一つの命題が「真」であるとき、**必要条件**と**十分条件**がすでに同時に成立しているとは思っていませんでした。片方が成立することはあるにせよ、どちらも成立するには、**矢印が両矢印**成立しないといけないと勘違いしていたわけです。つまり

$$p \longleftrightarrow q \quad (2)$$

この式 (2) が成立しなきゃならないと思っていたわけです。完全に原理を理解出来てませんでした。

矢印の方向のみを判断基準としていた私は、結局わけもわからず公式を適用していたのと同じことをしていたんですね…。かなり反省です。

### 3 必要条件・十分条件とベン図の関係

ではこの**せめて最低**必要条件、**それだけ決まれば**十分条件が何となくわかったところでもう一度ベン図との対応関係を見てみましょう。

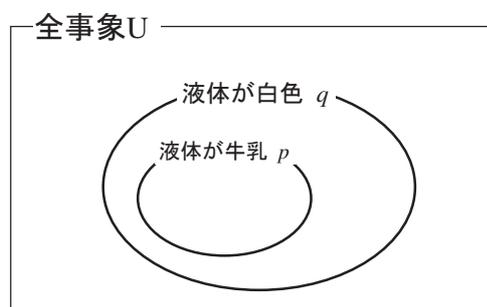


図 2: ベン図

$$p \longrightarrow q \quad (3)$$

式 (3) の命題が「真」のとき、つまりベン図が図 2 のように描けるとき

- $p$  は  $q$  であるための**それだけ決まれば**十分条件
- $q$  は  $p$  であるための**せめて最低**必要条件

が成立するわけです。要するに、ベン図において**外の集合** ( $q$ ) は**内の集合** ( $p$ ) が成り立つための**せめて最低**必要条件で、逆に**内の集合** ( $p$ ) は**外の集合** ( $q$ ) が成り立つための**それだけ決まれば**十分条件となります。この関係をベン図の中に明示すると図 3 のようになります。

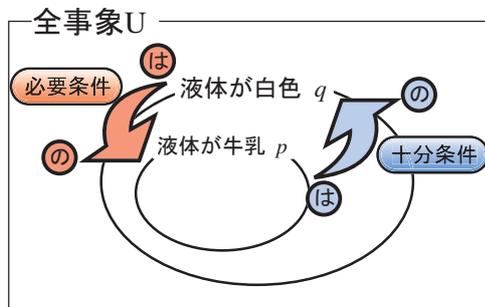


図 3: ベン図 (必要条件・十分条件書き込み)

図 3 中で気をつけて欲しいのは、矢印の端にくっついている で囲まれた「は」と「の」です。「は」が付いている方が主語になる方で、「の」が付いている方が目的語になる方です。

つまり主語が変わっていることに注目して欲しいのです。

ここで一つ考えていただきたいのですが

$$q \longleftarrow p \quad (4)$$

という命題があったとしましょう。  $p$  や  $q$  はこれまでと同様のものです。では、この命題は「真」なのでしょううか? 「偽」なのでしょううか? ...もちろん当たり前ですが  $p \longrightarrow q$  の書き方を逆にしただけですから (逆・裏・対偶の中の逆じゃありません。素直にひっくり返したという意味の逆です) 当然「真」ですよ! ですから当然この命題においても

- $p$  は  $q$  であるための **それだけ決まれば** 十分条件
- $q$  は  $p$  であるための **せめて最低** 必要条件

となります。本当に当たり前の話です。話は何も変わってませんから。もちろんこの命題のベン図も図 3 のようになりますよね?

この辺りで混乱している方、もしかしたらいらっしやいませんか?

そう、学校で教わった矢印の向きがどうかこうとかが **全く意味をなさず** 混乱してきますよね。実際私がそうでしたし...

そういうときは一度 <sup>ふかん</sup>俯瞰して広く全体を見渡すのがベストです。ということで、ここまでわかったことをまとめてみますよ?

$$p \longrightarrow q$$

「 $p$  だったら  $q$  だよな!」という命題が「真」のときの  $q$  のように、矢印を向けられた方は矢印のもとの条件  $p$  であるための **せめて最低** 必要条件。逆にそのとき矢印のもとの条件  $p$  は、矢印を向けられた先の条件  $q$  であるための **それだけ決まれば** 十分条件となります。

## 4 必要条件・十分条件ではまるトラップ

もしかしたら皆さんはちゃんと学校の先生が教えてくれて、何も疑問に思っていないのかも知れませんが…。だとしたらコレを書く意味が…。しかし、きっと同じように混乱してしまう人もこれから出てくるでしょう。その人のために続きを書きますか ( ^^ )

皆さんが混乱した原因はきっと次のどれかだと考えられます。

- 必要条件・十分条件において主語が変わっているという点がわからない
- 今回は  $p \rightarrow q$  のみ成立するときのお話だと言う事が微妙に理解できていない
- このサイトの説明の流れが悪いせいで理解できない

一番最後が原因の場合は、メールかゲストブックに書き込んでください。可能な限り手直します。

では順に解決していきましょう。学校で必要条件・十分条件を習うと

- $p \rightarrow q$  が十分条件
- $q \rightarrow p$  が必要条件

な～んて適当に習ってしまうことが多いので ( 少なくとも私の場合はそうでした ) 今回のお話のとき  $p \leftarrow q$  は言えないのに ( つまり「液体が白色ならば、液体は牛乳である」という命題は「偽」ということ ) どうして必要条件なんだろう？なんて思った方も多いと思います。

しかしよく見たら、実は単純なお話なんです。入試問題を見ると、こう書いてあります。「 $p$  ( 液体が牛乳 ) であることは、 $q$  ( 液体が白色 ) であることの何条件か？」と。

主語が「 $p$  であることは」と  $p$  の方へ固定されていますね。ですからこの設問で問われていることに答えるためには

- $p \rightarrow q$  は成立するのか？
- $q \rightarrow p$  は成立するのか？

をまず考えて、成立するときは、 $p$  は  $q$  であるための何なのか？を考えればよいということになります。何故上のリストのように、 $p \rightarrow q$  と  $q \rightarrow p$  の二つを考えなくてはならないのでしょうか？

それは  $p \rightarrow q$  だけだと、 $p$  が主語になれる条件は 1 つ ( **それだけ決まれば十分条件** ) しかないからです。 $p$  が  $q$  の **せめて最低** 必要条件であることを示すためにはまず  $q \rightarrow p$  が「真」であることを示さないとダメですね。

では実例で考えてみましょう。

問：液体が牛乳であることは、液体が白色であることの何条件か？

「液体が牛乳  $\rightarrow$  液体が白色」は「真」ですね。問題には「液体が牛乳であること」は何条件か？とあるので、もちろん（**それだけ決まれば**）十分条件です！（「液体が白色であること」は「液体が牛乳であること」の**せめて最低**必要条件ですが、この問いでは問われていません。）

では次に命題の逆をとって「液体が白色  $\rightarrow$  液体が牛乳」を考えてみましょう。...絶対に「偽」ですね。もしかしたら白ペンキかも知れませんし...。ですから、この命題についての必要条件・十分条件はありません。（もちろんこの命題が「真」であったならば、「液体が牛乳である」ことは、「液体が白色である」ことの**せめて最低**必要条件と言えたでしょう。しかし今回は残念なことに、命題が「偽」であるために、それが言えないのです。）

さてお分かりですか？

$$p \rightarrow q \text{ は真} \tag{5}$$

$$q \rightarrow p \text{ は偽} \tag{6}$$

ですから、式 (5) から  $p$  は  $q$  であるための**それだけ決まれば**十分条件と言えますが、式 (6) は偽なので  $p$  は  $q$  であるための**せめて最低**必要条件とは言えないのです。

そして一般的に学校で教わる必要条件か十分条件かを見分ける方法では、この式 (5)、式 (6) を 2 回書くのが面倒なので

$$p \iff q \tag{7}$$

のように 1 つの式にまとめてしまっているのです。問いでは「 $p$  は？」という風に  $p$  にのみ注目して問われているので、常に式 (7) の左辺にある  $p$  に注目して条件を考えています。

したがって、 $\rightarrow$  が「真」ならば、 $p$  は  $q$  であるための**それだけ決まれば**十分条件と言えますし、 $\leftarrow$  が「真」ならば  $p$  は  $q$  であるための**せめて最低**必要条件と言えるわけです。

私のはまったトラップは式 (7) のとき  $\iff$  が成立しなければ、必要条件・十分条件の両方は出現しないというものでした。しかし実際の定義で考えると 1 つの命題が「真」であれば、**必ず**必要条件と十分条件が**同時に**出てくるわけです。

わかりにくいのは、より簡単に表されてしまった「必要条件」と「十分条件」という言葉だったわけです。...「必要条件」や「十分条件」のイメージが出来たでしょうか？

問題演習はとりあえず要望があれば載せますが、原理さえ分かれば後はご自身でやってもらえばいいかななんて考えて、とりあえず問題は載せません。頑張ってみてください！