目 次

2.15　運動方程式

力学において運動方程式の重要度はかなり上位に位置します。この運動方程式が理解できてないということは、力学はもう不得意分野だと自分から告白しているようなものです。ですから、まずは運動方程式の形、そしてその式が伝えたい気持ち、さらに何故運動方程式を立てなくてはならないのかということを順に書いていきたいと思います。

2.15.1　運動方程式の形

物体に接触するとその物体間に力が働くことは「力とはどこに発生するのか」のページで説明しました。ではその「力」が発生することにより一体どういうことが起こるのでしょうか？

力が物体に働くことでその物体の運動の状態を変化させることが出来ます。例えば、止まってた物体を動かしたり、動いていた物体を止めたり、また速度 v_0[m/s] で動いている物体を加速させて速度を v[m/s] にしたり…と、力が働くことで、その物体の運動が変化するのです。

では次の図 1 をご覧下さい。

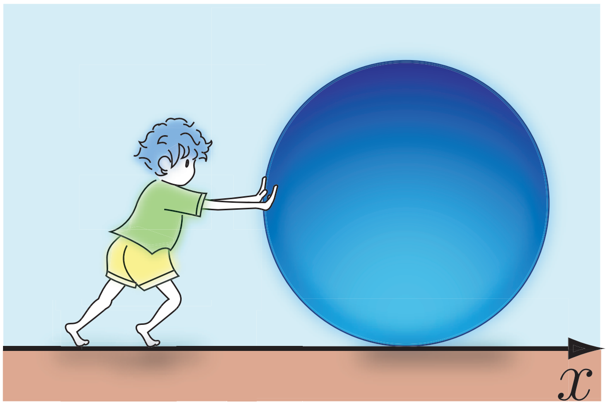

図 1: 大玉を押す

大玉の質量を M[kg] としましょう。大玉に注目すると、どのような力が働いているのでしょうか？

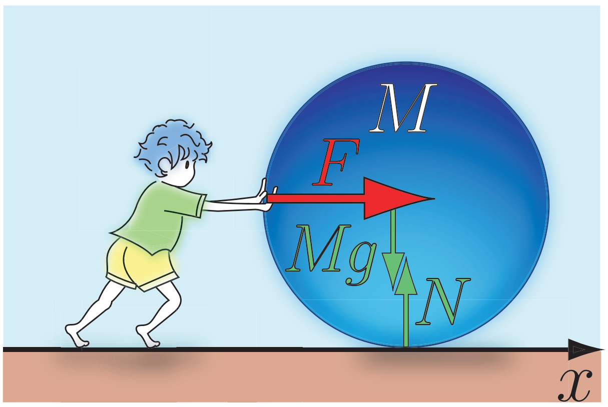

図 2: 大玉に見える力

もちろんもうどの力が見えるかは判断できますよね。少年から押されている力 F[N]、そして地面と接触しているから垂直抗力 N[N]、そして最後に接触しなくても働く力：重力 Mg[N] です。

「力とはどこに発生するのか」のページでは力の効果に関してはほとんど説明していませんでした。ですからここでしっかりと押さえてもらいます。力が働くと物体の運動の状態が変化するのでしたね。もっと正確に言うと、力が働くことにより、加速度が生じるのです。

ニュートンが発見した運動の法則を示す式は

$$ma = F \tag{1}$$

となります。ここでじっくり式 (1) についてのイメージを構築しましょう！まず式 (1) はベクトル方程式です。つまり式 (1) には方向の情報まで含まれているということです。ベクトル方程式ということを意識しながらもう一度式 (1) を示してみましょう。

$$m\,\vec{a} = \vec{F} \tag{2}$$

となります。この意味は分かるでしょうか？以前にもバネのページで同じような式を示しましたが、もう一度この式 (2) の意味を再確認してみましょう。

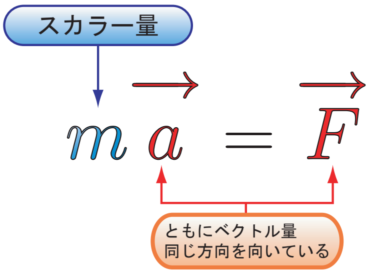

図 3: ベクトル方程式

m[kg] は質量ですのでスカラー量です。しかし力 $\vec{F}$[N] は向きと大きさを持つ値ですからベクトル量です。ということは、右辺に向きと大きさを持つ値がありますので、当然それと同様の量を持つものが左辺にあるはずです。それが加速度 $\vec{a}$[m/s^2] となります。加速度も向きと大きさを持つ値でしたね。

つまり物体に力 F[N] をかけると、その力を加えた方向と同じ向きに加速度 a[m/s^2] を生じるということを意味しています。逆に言うと、物体に加速度 a[m/s^2] が生じるということは、その加速度と同じ方向に力 F[N] を受けていることを意味します。

物体に力 F[N] を加えたとき、力を加える物体によって生じる加速度 a[m/s^2] に違いがあります。

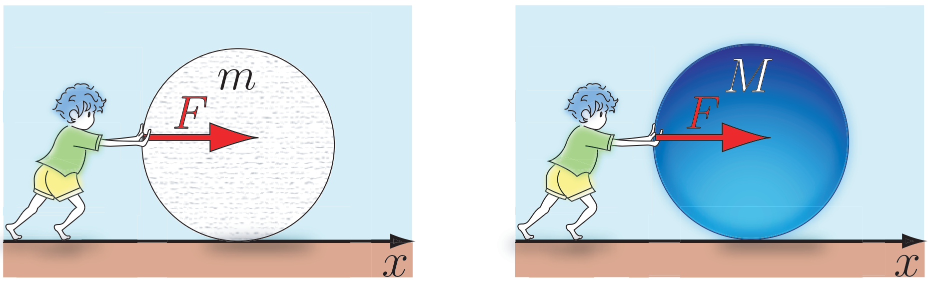

図 4: 発泡スチロールの大玉と、水晶の大玉

例えば図 4 のように同じ大きさで質量の小さな発泡スチロールの大玉 m[kg] と質量の大きな水晶で出来た大玉 M[kg] を同じ力で押したときのことを考えてみましょう。

どちらの大玉にも同じ力を加えますが、しかし経験上軽い発砲スチロールの大玉の方が勢いよく加速していくことは誰にとっても明らかだと思います。つまり、同じ大きさの力を加えているにも関わらず、物体によって加速度の生じ方に違いが出るのです。

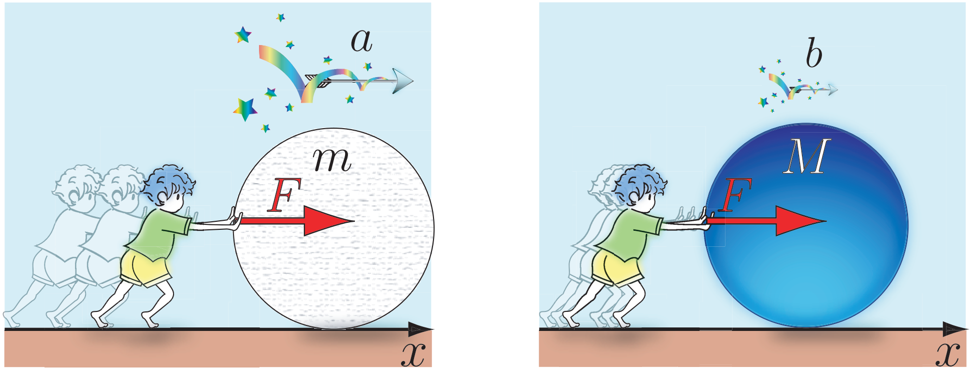

図 5: 動き出し易さの違い

この一定の力 F[N] を加えたとき、加速度 a[m/s^2] の生じにくさを、物体に固有の値として質量 m[kg] と決めます。

先ほどわかりやすいようにそれぞれの大玉の質量を与えてしまいましたが、実際には質量はこのように同じ力を加えたときの加速度の生じ易さの違いを表す比例定数という表され方をします。このようなイメージを持っておくことは、「質量」と「重さ」の違いを理解するうえでもとても重要なこととなります。

2.15.2　質量と重さの違い

では質量と重さの違いについて考えていきましょう。

質量とは先ほども説明しましたように加速度の生じにくさ（動かしにくさ）を表した比例定数という扱いでした。単位は [kg] で表されます。（実際には万有引力から考える質量もありますが、ここでは扱いません。高校物理において必要がないからです。）

それに対して物理において使われる重さというものは「重力の大きさ」のことを指します。つまり力です。ですから単位は [N] となります。

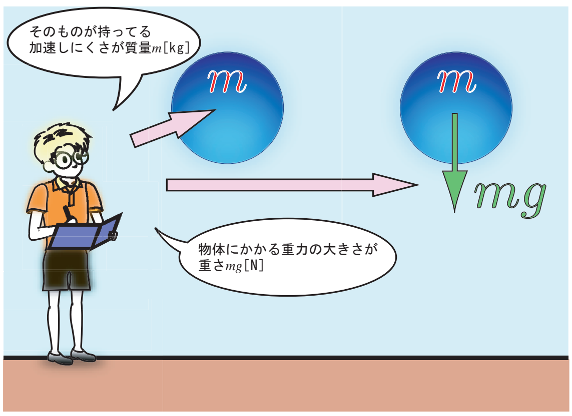

図 6: 質量と重さの違い

普段実生活で用いる「重さ」という概念は物理における「質量」を意味するため、意味を混同し混乱を生じますが、たとえば「重さ 60kg」という表現は物理においてはなされません。あくまで「60kg」は質量であり、重さというのであればその「60kg」の質量を持つ物体に働く重力の大きさを表すからです。

地表付近における物体はいかなるものであっても地面方向へ同じ加速度を生じます。（実は緯度によって多少の違いがありますが、ここでは気にしません。）この加速度を $g[\mathrm{m/s^2}]$ とします。そうすると、質量 $m[\mathrm{kg}]$ の物体は当然加速度 $g[\mathrm{m/s^2}]$ を生じますから、運動方程式より

$$mg = F \tag{3}$$

という地面向きに $mg[\mathrm{N}]$ の力を受けていることになります。

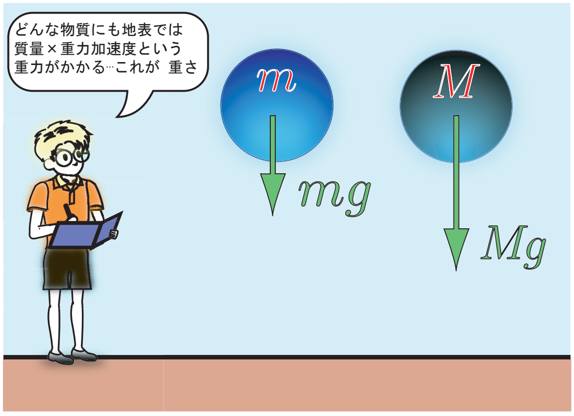

図 7: 重さ＝重力のこと

質量 $m[\mathrm{kg}]$ は物体の加速しにくさを表す量（物体が本質的に有する量）ですから、地球上でも月面上でも、宇宙空間でも変わりませんが、重さは重力の大きさ（相手がいることで相対的に決まる量）ですから、地球上や月面上では変わってしまいます。

月における重力加速度 $g'[\mathrm{m/s^2}]$ は地球の重力加速度 $g[\mathrm{m/s^2}]$ の約 $\frac{1}{6}$ 倍の $g' = \frac{1}{6}g$ という関係が成り立ちますので、月における質量 $m[\mathrm{kg}]$ の物体の重さ $mg'[\mathrm{N}]$ は地球における重さ $mg[\mathrm{N}]$ の $\frac{1}{6}$ となってしまいます。

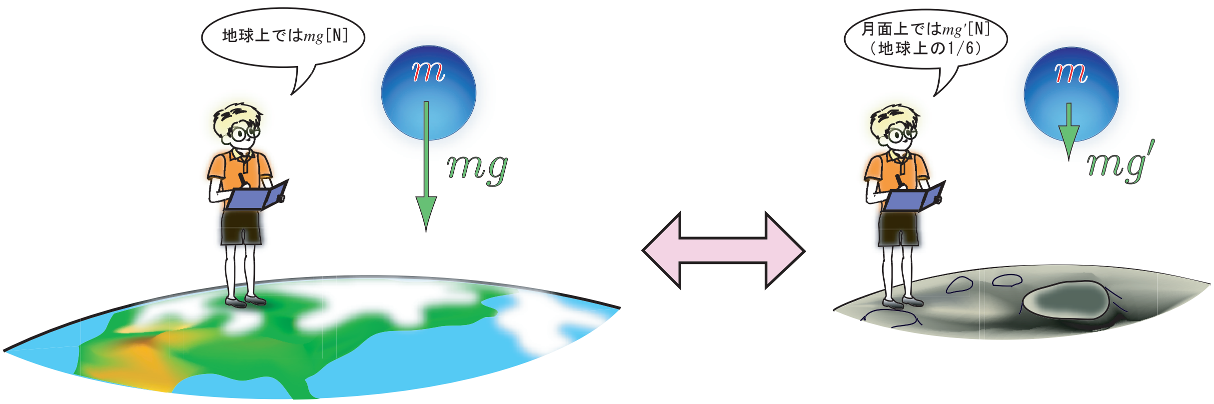

図 8: 地球上と月面上での重さの違い

2.15.3　慣性の法則

折角質量の話をしましたので、ここで慣性の法則についてもお話したいと思います。

「慣性の法則」というのは、ちょくちょく耳にする言葉だと思います。大体はテレビ番組で、ちょっと皆を驚かせる実験だったりするんでしょうが、一番有名なのは、コップの上に葉書を置いて、その葉書を勢い良くはじくことによって葉書の上に置いてあった 10 円玉をコップ内に落とすものでしょう…

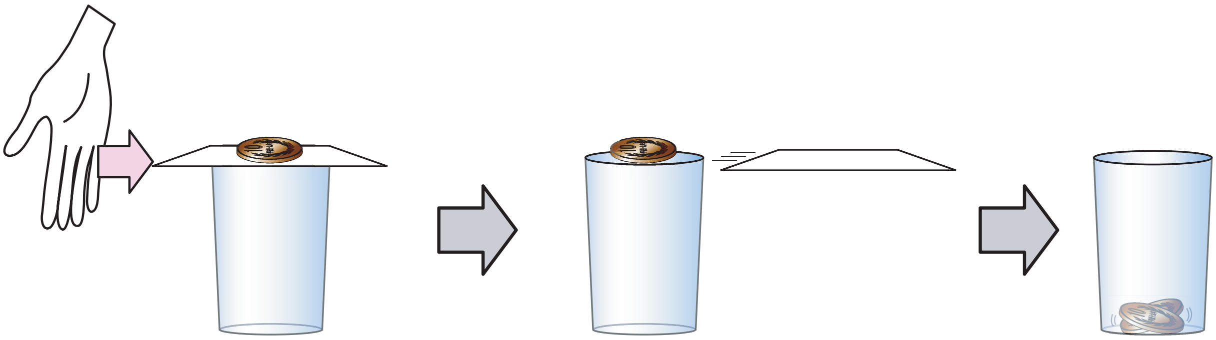

図 9: カップの中に落ちる 10 円玉

これは 10 円玉に慣性が働いていることに因ります。ニュートンによる慣性の法則を示しましょう。物体に働く力がつりあっているとき

- 静止している物体は静止し続ける
- ある速度を持って運動している物体はその速度で運動し続ける

というものです。

つまり先ほどの 10 円玉には横方向へ力が働いていなかったので（本当は多少の摩擦力は働いていたはずですが…)、そのまま止まっていようとして下に落ちたわけです。この物体に働く元の状態のままでいようとする性質のことを慣性といいます。この性質は物体の質量 m が大きければ大きいほど、大きくなります。

あなたが電車に乗ったときのことを思い出してみましょう。電車が走り始めると、進行方向と逆方向へ力が働いているように感じます。これは電車と直接接触している足には摩擦力が働くために前方へ移動しますが、体は止まっていようとするので、体が置いていかれてしまう現象です。

ではあの兄妹にまた登場してもらいましょう。図 10 をご覧ください。

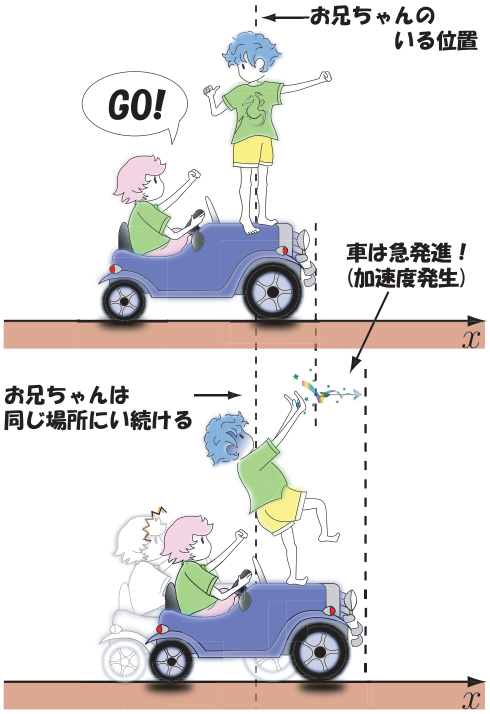

図 10: 勢いが良過ぎた！

何を思ったか、お兄ちゃんが車の上に乗ってます。きっと押しつかれたのでしょう…。「さぁ行こうよ！」の声に妹がいきなりアクセルを踏み込みます！

次の瞬間、お兄ちゃんの足は車との接触面から摩擦力を受け進行方向へ進んで行きます。しかし、お兄ちゃんの体自身はその場に止まっていようとするので（慣性）体だけ置いていかれます。（加速度がきつ過ぎましたね）

このように、急に加速度を発生させると慣性が大きく現れます。先ほどの図 10 でも、もしゆっくり加速したなら、お兄ちゃんは次第に速度を持ち、十分立ったまま車と共に進むことが出来たはずです。つまり、系（今回はお兄ちゃんを中心に見ると、彼の地面にあたる車に乗っかっているもの全体）の加速度 a が大きくても、慣性が強く働きます。

慣性の法則を紹介するときに条件があったのを覚えていますか？物体に働く力がつりあっているときでした。ここで手で小球を持って静止させている状態を考えてみます。

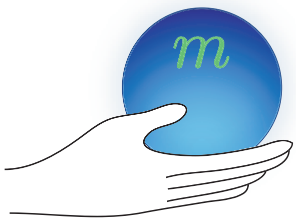

図 11: 小球を支える

この状態で小球は静止し続けています。つまり小球に働く上下左右の力がつりあっているので止まり続けているわけです。

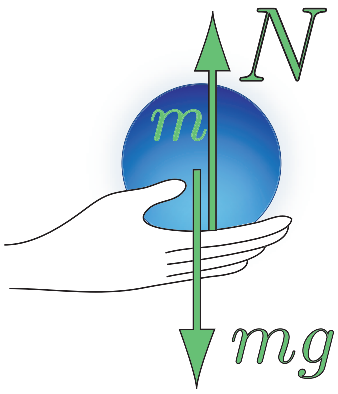

図 12: 小球に働く力

さて、この状態で小球を h[m] の高さまで等速で持ち上げてみることを考えてみましょう。どうやったら小球を等速で持ち上げられるでしょうか？

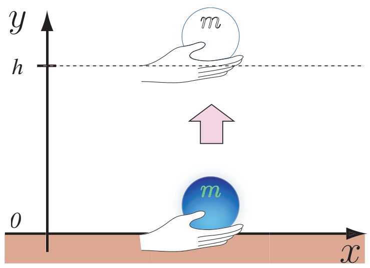

図 13: 小球を等速で持ち上げる

今小球には下向きに mg[N] の力が働き、上向きには手による垂直抗力 N[N] が働いて静止しているので、小球を持ち上げるためには手から働く垂直抗力 N[N] をわずかでもいいので重力 mg[N] よりも大きくする必要があると考える人が多いでしょう。

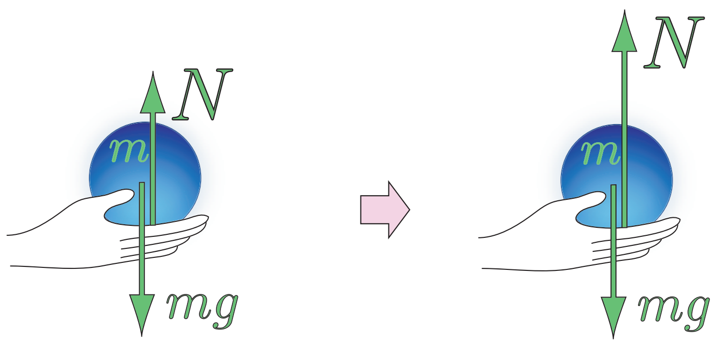

図 14: 垂直抗力を大きくする

でもそれは加速度運動をするときの条件ですね。物体に力が働くと加速度を生じます。正確に言うと、力が働くと加速度を生じるというのは不十分で、つりあっていない力が働くと加速度を生じる…ですね。ですから、今回のように垂直抗力 N[N] を大きくすると、力のつり合いが取れてませんから、上方へ加速度運動をしてしまいます。では等速で移動させるためにはどうしたらいいのでしょうか？

先ほどから「慣性の法則」で取り上げましたように、物体に働く力がつりあっているとき、静止している物体は静止し続け、速度 v[m/s] で運動している物体は速度 v[m/s] で運動し続けるのでした。

つまり、等速で持ち上げるためには、すでに物体に働く力はつりあっているので、手の下からちょっとコツンと初速度 v_0[m/s] を与えてあげると、力がつりあった状態のまま等速 v_0[m/s] で高さ h[m] まで進みます。

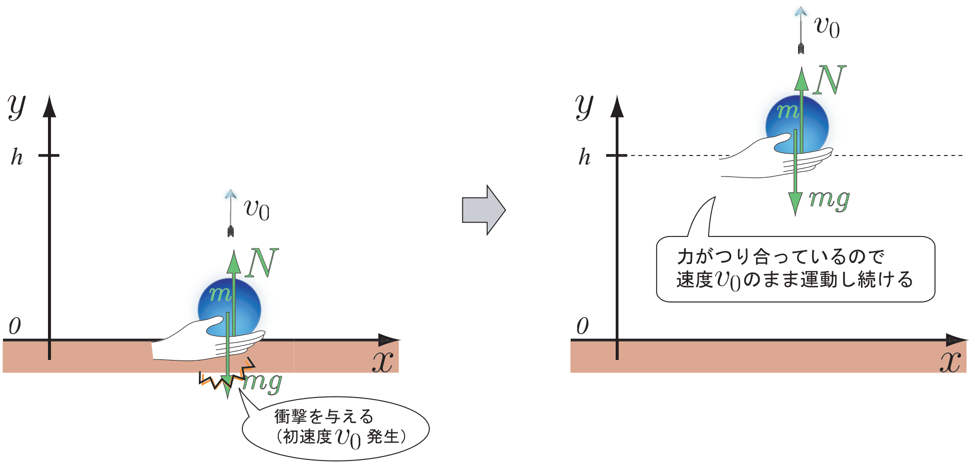

図 15: 等速度運動をしながら上昇

現実世界では自分の意志により物体を上げ下げしますので、初速度を加えられたら勝手に高さ h[m] まで上がるとは理解しにくいと思いますが（人間はあくまで物体の上下運動を筋肉の動きによって制御しているので、物体を上げる行為も自分の意志であえて行っているように感じてしまうのが原因だと思います）、常に重力 mg[N] と等しい力 N[N] を物体の下から発生し得る装置があるとしたら、今回のお話は理解していただけると思います。

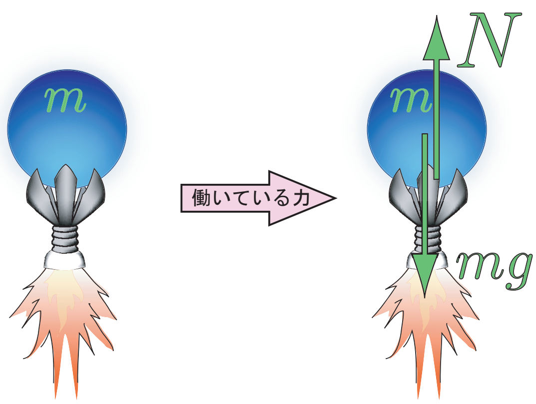

図 16: 上方へ力 N を発生させるロケット

これと先ほどの、手で押し上げていた図 15 の手を置き換えてみると

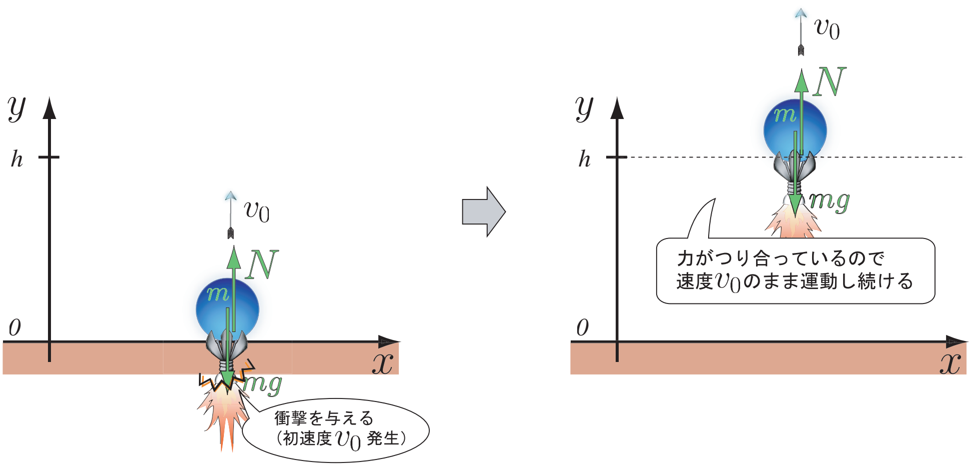

図 17: 等速度運動をしながら上昇

となります。

わざわざ手で押し上げている図を入れたのは…（こういう装置を描くのが面倒だったということと…）一般に教科書や参考書に書いてある「手を用いた運動」で、私が長い間（物体を動かすためには多少の力の差を生じなければならないという）勘違いをしていたことに因ります。ここまでの話をよく読んで、等速で運動するということはどういうことかをイメージしてもらえたらこれほどうれしいことはありません。

同じ話ですが、よく見かける「慣性」に関する初学者がおちいり易い間違いとしては、「等速度運動をしている物体を見て力が働いていると思ってしまう勘違い」が挙げれます。ただ等速度運動をするだけならば力は必要ありません。力が働いていたら物体の運動が変化してしまうのでしたね。

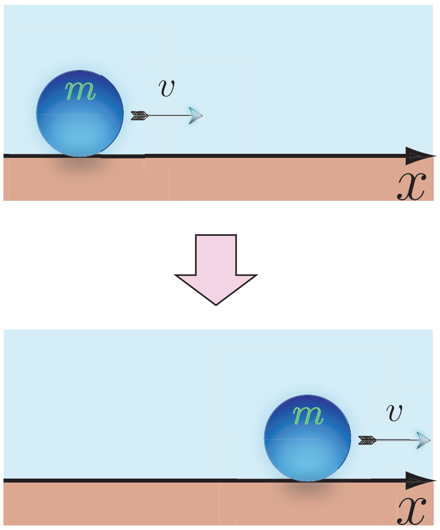

図 18: 等速度運動

このような運動の際に、決して力を書き込まないようにしてください。よく見かける間違いとして力を v としてみたり、力 $\frac{1}{2}mv^2$ が働くなどエネルギーを力にしてしまったりしているものがあります。でももう皆さんはわかりますよね。等速ならば力はつり合っているのです。絶対に加速度を生じるような力を仮想しないようにしてください。

2.15.4 運動方程式を立てる意味

寄り道してしまいましたが、本題の運動方程式に戻りましょう。実際の物体の運動に適用できる運動方程式ですが、受験にはどのようなタイミングで立てるべき式なのでしょうか？

あまり意識していないかも知れませんが、基本的に運動方程式は加速度を求めたいときに使います。

当然、それ以外で加速度が与えられた状態で、物体にかかっている力を求めるなどの場面でも運動方程式は使えますが、やはり王道は加速度を求めたいときとなります。

加速度が求まって何がうれしいの？等と思っている方もいらっしゃるでしょう。でもうれしいですよ？だって、力学の基本 3 公式が使えるじゃないですか！

$$v = v_0 + at \tag{4}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \tag{6}$$

式 (6) は式 (4)、式 (5) から t を消去した式でしたね。ここでこれらの式を良くご覧下さい。全てに加速度 a が存在しますね。つまりこれら式 (4)、(5)、(6) を用いるときは必ず a が必要ということになります。

この a を求めるオーソドックスパターンが運動方程式になるわけです。ここでこの加速度 a を求めるパターンとして代表的なものでもまとめてみましょうか。

- 運動方程式を用いる
- 加速度の定義式から求める
- $v-t$ グラフから求める
- 3 公式から逆に求める
- （力学 2 の分野で）単振動の式から求める

こんなところでしょうか。そして重要度としては最初の「運動方程式から」が一番でしょう。それくらい大事な式です。

運動方程式を立てるのは「加速度を求めたいから」というイメージは何となくわかってきたと思います。そこで、この運動方程式をもう一度見直してみましょう。$ma = F$ となっています。つまりこの運動方程式を立てて何かの値を求めるためには、最低 2 変数（m か a か F のうちのいづれか 2 つ）が分かってないといけないのです。そうしないと残りの 1 数の値が、式から一意に取り出せません。これはちゃんと意識しておいてください。

こうして求めた加速度を基本 3 公式に代入して、t 秒後の物体の位置だったり、t 秒後の物体の速度だったりが求まります。この「加速度を求めたいから運動方程式を使う」というイメージは必ず覚えておいてください。

2.15.5　運動方程式と言われたら…

さてこれまで、運動方程式の形が $ma = F$ であるとか、何故運動方程式を立てたいのかとか、そういう基礎的なイメージを固めてきました。では、ここで運動方程式と言われたら何をするかということをご説明致します。

まず「運動方程式と言われたら…」という絶対的に私の薦める方法を説明しておきます。皆さんは運動方程式と言われたら何を想像するでしょうか？きっと

$$ma = F \tag{7}$$

ですよね？でもこれ…やめましょう。どうも全ての理系教科において公式に捉われ過ぎる方が多いようですが、そもそも理系分野における公式というものは何らかの気持ち（発見者やその他の人々の）を含みます。その気持ちさえ理解できれば全てすぐに解決法（解法）が見つかりますよ。

ということで、この運動方程式も同じです。何でもかんでも $ma = F$ と書けば済むわけではありません。私がよく見かけたのは F と表された力が無いにも関わらず、すぐに $ma = F$ と書いてしまう子達です。とりあえずこの F は書かなくてならないものとして頭に定着しているのでしょうね…。これではいつまでたっても問題が解けるようにはなりません。

ではどのようにするかというと

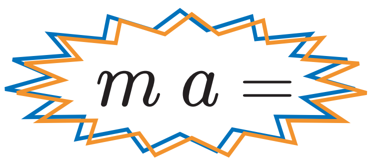

図 19: 運動方程式と言われたら

とだけ書くんです。「$ma =$」とだけ書いておいて、あとはゆっくりと物体に働く力を吟味して書くべき力だけを書くんです。

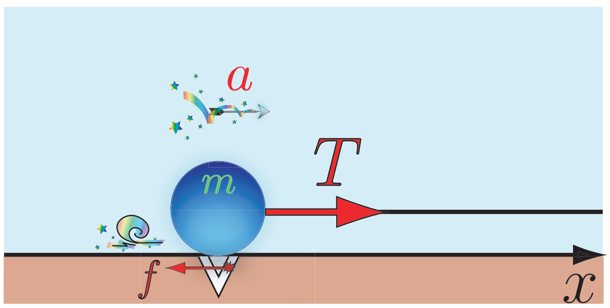

図 20: 運動方程式を立てる

折角なので図 20 について考えてみましょう。まずは小物体の質量をチェックします。m[kg] ですね。軸は右方向を向いています。ですから加速度 a[m/s^2] の正方向は当然右方向となります。この状態で運動方程式の前半部を立てましょう！

$$ma = \tag{8}$$

ではゆっくり図中の力を確認していきます（今回はあえて運動方向の力のみを描き、鉛直方向は無視します）。右方向へ T[N]、左方向へ動摩擦力 f[N] が物体に働いています。ですから、物体には軸方向を確認し

て $T-f$[N] の力が働きますので、式 (8) の運動方程式を完成させると

$$ma = T - f \tag{9}$$

ちゃんと軸方向は確認してくださいね。ということで、加速度 a を求めてみると

$$a = \frac{T-f}{m} \tag{10}$$

となります。ルールさえ守ればすっごく簡単ですよね！

そもそも運動方程式 $ma = F$ 中の F とは、物体にかかっている力の総称であり、実際にかかっている力に置き換えて書くものです。しかし、公式を絶対的なものとして捉えるあまり、どうしてもこの F を書いてしまう人や、この F という文字を問題文中に探す人が出てきます。…探すだけ無駄です。しっかりと式の意味を理解していれば、そんな報われない不必要な努力はしなくてもいいことが分かっていただけると思います。ですから、今後は $ma =$ とだけ書いて、ゆっくり考えましょう。もちろんこの a は軸向きに定義してあります。ベクトル量ですから、当たり前ですよね？

2.15.6　運動方程式を立てる手順

最後に運動方程式を立てる手順についてお話します。手順というのは、慣れてきたらもちろん省けるところは省いてもらっても構いません。しかし初心者のうちはしっかりとこの手順通りにしてください。車の運転を「さぁ好きにやってごらん。」といきなり言われても出来ませんよね？最初に何をチェックして、次に何をして…という手順はこれまで物理を築き上げてきた先人達が苦労して最も合理的に構築したシステムです。初めて学ぶときはまず体系化されたそのシステムを学ぶべきです。

では手順を示します。

1. 注目物体 A を決める。
2. A に働く力を全て描き込む。
3. 軸が設定してなかった場合、運動方向へ軸を決め、その軸と直交するようにもう 1 つ軸を決める。
4. A に働く力全てを各軸方向へ分解する。
5. 各軸方向において、力がつり合っていなかったら運動方程式を立て、つり合っていたら力のつり合いの式を立てる。

となります。では具体例を見ながらやり方を学びましょう。まずは図 21 をご覧下さい。この図中の小物体 m について、力のつり合いの式と運動方程式を求めてもらいます。（台と小球の間には摩擦はありません。）

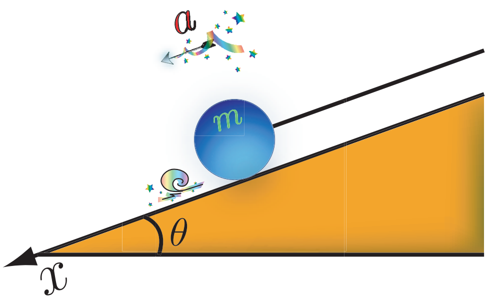

図 21: 三角台上の運動

今回は問題にもあるように小球 m に注目することにします。まずはよく図を見ましょう。この物体は糸で引かれることにより、上方へ加速度運動をしています。では注目物体は決めましたので、次に小球 m に働く力を全て図示してみましょう。

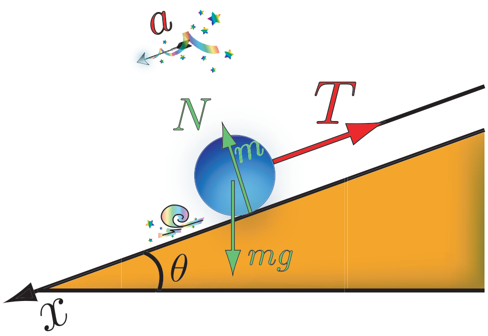

図 22: 小球に働く力を全て図示

もちろん図 22 のように全て図示できますよね。力は接触点（面）に働くのでした。ですから、小球のどこが接触しているかを考えると、すぐに糸から T[N]、そして斜面から垂直抗力 N[N]、そしてもう接触している点がありませんから、例外的に接触しなくても働く力である重力 mg[N] を書き込みます。方向を間違えないようにしてください。あくまでも重力は鉛直下向きに働き、決して斜面と垂直方向に働いているわけではありません。

次に軸を書き込みます。問題により x 軸が斜面に平行下向きに設定してあるため、あとはこの x 軸と直交する y 軸を図 23 のようにとります。

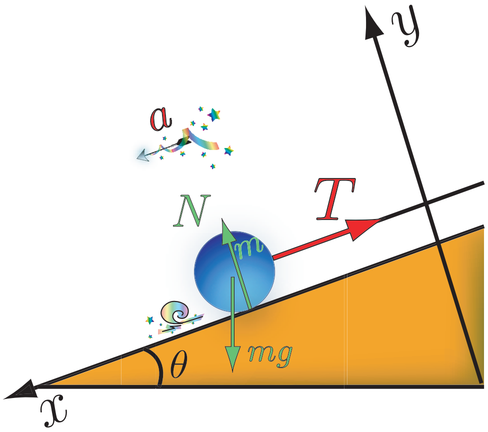

図 23: 軸を設定

さて、軸を設定するところまでは簡単に出来ましたね。今回は x 軸が設定してありましたが、実際の問題で設定してないときは自分で設定してください。基本的には運動方向（今回は斜面方向）に軸をとった方が計算は楽になります。

　ここから問題なく次の「軸方向へ力の分解」が出来ればいいですが、皆さんはどうでしょう？この分解が苦手な人も結構いるのではないでしょうか？（もしいましたら分解のところのお話を追加しますので、メールかゲストブックに書き込んでください。）

　軸と力の両方を見比べると T は x 軸方向を、N は y 軸方向を向いているのが分かりますが、重力 mg は x 軸方向も y 軸方向も向いていませんね。そこで、この mg を x 軸方向と y 軸方向へ分解する必要があります。つまり力のベクトルの分解です。

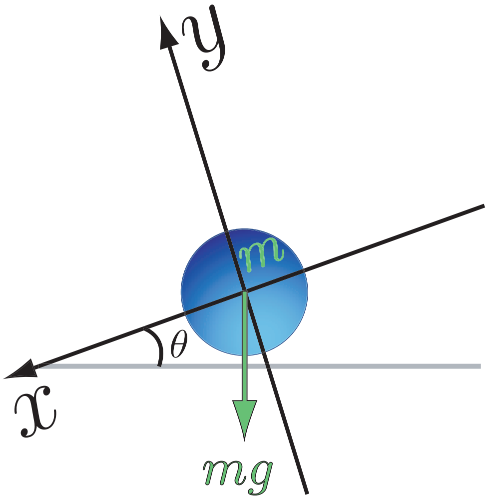

図 24: 重力の分解

図 24 のように小球に注目して、小球のところに両軸を持ってきて mg の始点と両軸の原点を合わせます。ベクトルの分解は、分解したいベクトルの終点から各軸へ垂線を下ろし（図 25）、始点からその交点までのベクトルに分解するという手順を踏みます。

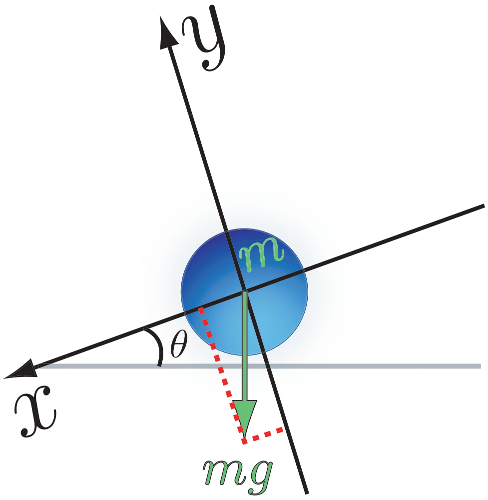

図 25: 重力ベクトルの先から各軸へ垂線を下ろす

両軸の交点である原点から垂線と各軸の交点（垂線の足）まで、ベクトルを伸ばします。

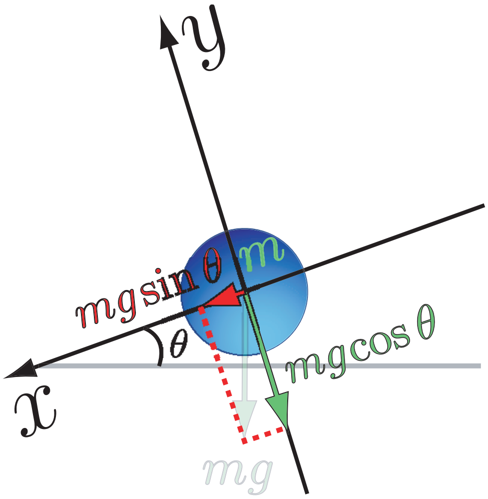

図 26: 分解完了！

あとは θ に注意しながら、x 軸方向へ分解したベクトルの大きさを $mg\sin\theta$[N]、そして y 軸方向へ分解したベクトルの大きさを $mg\cos\theta$[N] と求めて描き込みます。

これを元の図に描き込むと図 27 のようになります。

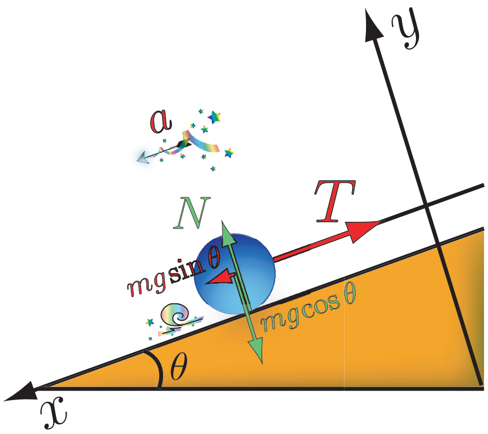

図 27: 各力を全て軸方向へ分解完了！

ここまででようやく全ての準備が整いました。あとは手順 5 を実行するのみです。まずは x 軸方向をご覧下さい。力がつり合ってませんので等加速度運動をします。運動方向は x 軸の負方向です。でも当然求める加速度 $a[\mathrm{m/s^2}]$ は x 軸正方向へ決めます。ベクトル量の未知数だからですね。

では、x 軸方向について、運動方程式を立てましょう。まずは

$$ma = \tag{11}$$

でしたね。次に軸方向に注意しながら小物体 m に働いている力を式 (11) の右辺に書き込みます。力は正方向に $mg\sin\theta$ と、負方向へ T ですので式 (11) は

$$ma = mg\sin\theta - T \tag{12}$$

となります。もしここから加速度 a が知りたくてもすぐに分かりますよね。もちろん $mg\sin\theta$ や T のどちらが大きいかという話はしていませんが、T が大きければ加速度 a は負になりますし、$mg\sin\theta$ が大きければ加速度 a は正となって、軸の向きに対して正しく加速度の方向が決まるわけです。（加速度の方向が決まるだけで、現在移動してる方向…つまり速度が決まるわけではないことに注意してください。）

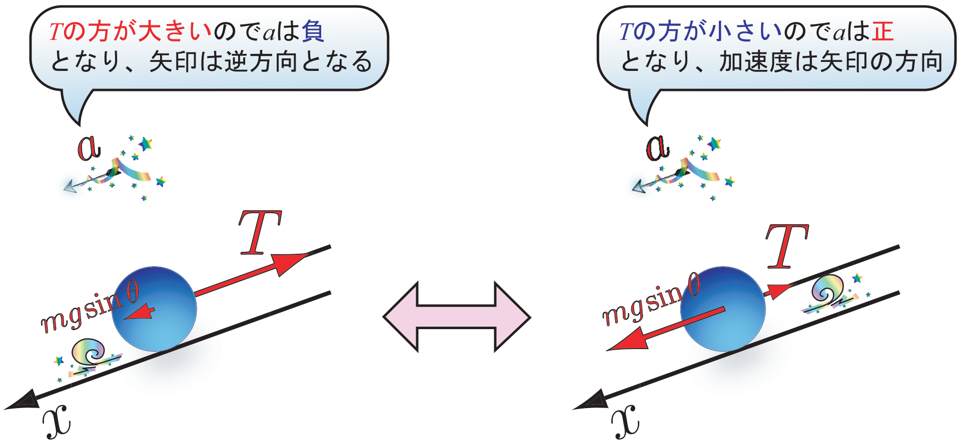

図 28: 加速度の正負の違い

次に y 軸方向ですが、当然この方向への運動の変化は無いことがわかります。ですからこの y 軸方向は力のつり合いの式を解けばよいわけです。

$$N = mg\cos\theta \tag{13}$$

ということで、垂直抗力 N の大きさが $mg\cos\theta$ であることがわかりました。よく垂直抗力 N をすぐに $mg\cos\theta$ としてしまう人を見かけますが、そういう人はきっと問題が複雑になった瞬間に足元をすくわれます。垂直抗力というのは受動的に発生する力です。押されるから仕方なく発揮する力という感覚です。ですから、まず生じている力を全て描いてから、その後で力のつり合いにより垂直抗力を決定しましょう。

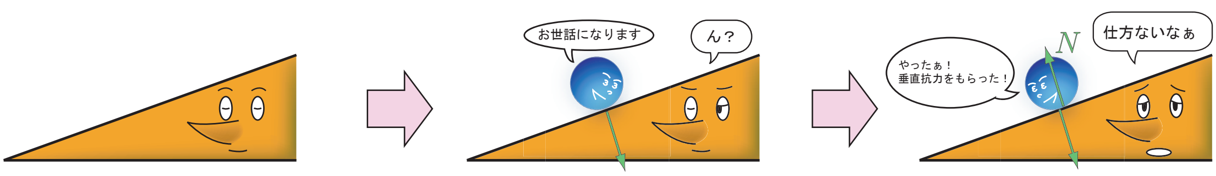

図 29: 垂直抗力のイメージ

というということで、求められる運動方程式は x 軸方向へ式 (12)、力のつり合いの式は y 軸方向へ式 (13) となります。どうでしょうか？案外簡単でしょ？

ちなみに、別に力のつり合いの式というのを立てなくても構いません。どういうことかというと、あえて力のつり合いという言葉を使わなくても運動方程式で処理して OK ですよ！ということです。とりあえず y 軸方向へ運動していると仮定して運動方程式を立ててみましょう。

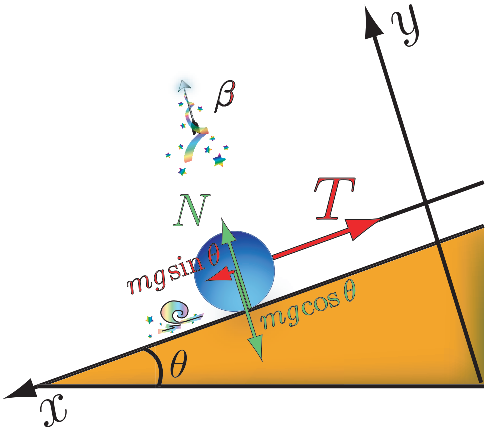

図 30: y 軸方向の運動

ここで y 軸方向を向いている加速度を $\beta[\mathrm{m/s^2}]$ として運動方程式を立てると

$$m\beta = \tag{14}$$

ですね。さて y 軸方向に働いている力を順に見てみると、正方向へ N[N]、負方向へ $mg\cos\theta$[N] です。ですから式 (14) の右辺に書き込んで

$$m\beta = N - mg\cos\theta \tag{15}$$

となります。ここで冷静になって考えてみるんです。どう考えても y 軸方向へは加速度運動してないなぁ…と。そうすると加速度運動してないなら $\beta = 0$ だと分かりますよね。そこで式 (15) は

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta$$
$$N = mg\cos\theta \tag{16}$$

となり、力のつり合いの式を解いたのと同じ結果となります。大事なのは y 軸方向へ加速度運動していないということに気付くことができる経験？です。

2.15.7　運動方程式を使った問題 1

コレを作るかどうか迷ったんですが、ここまで学んだ概念をどう問題に適用していいかわからないというのも面白くないでしょうから、少し練習してみましょう。

問 1：図 31 のように、三角台上を質量 m[kg] の物体が初速度 v[m/s] で x 軸と逆方向へ上っている。このとき台と物体との間に摩擦力は無いものとする。小物体 m の加速度を求めなさい。

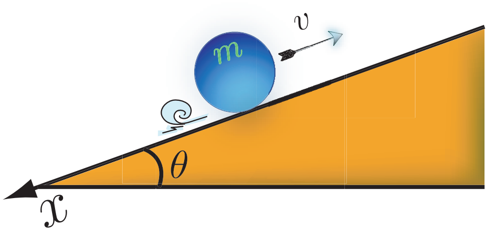

図 31: 三角台上の運動

解答：今回問われているのはズバリ加速度ですね。ということはすぐに運動方程式が使えないかどうか考えてみましょう。もちろん力をすべて描くことが可能ですので、運動方程式が使えます。

では手順に従って…やってくださいね。手順 4 まで終わった段階の図は図 32 となります。

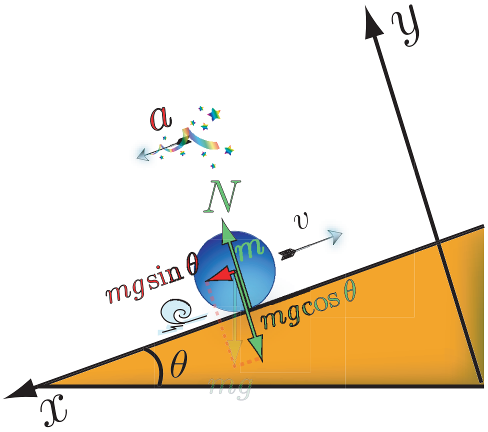

図 32: 力を書き込み軸を設定し、力を分解したもの

図 32 のように出来たでしょうか？加速度 $a[\mathrm{m/s^2}]$ は軸が斜面下向きに設定してありますので、当然そちら向きになります。では x 軸方向の運動方程式を立てましょう。まずは

$$ma = \tag{17}$$

でしたね。ここまで書いておいて x 軸方向に働く力を見つけましょう。$mg\sin\theta$ しかありません。ですから式 (17) の右辺に代入して

$$ma = mg\sin\theta \tag{18}$$

となります。ですから求める加速度 $a[\mathrm{m/s^2}]$ は

$$a = g\sin\theta \tag{19}$$

です。簡単ですね。ちなみに必要ないですが y 軸方向では加速度運動はしないですから力のつり合いの式を立てましょう。

$$N = mg\cos\theta \tag{20}$$

となります。このようにとても簡単に加速度 a も垂直抗力 N も求まります。速度 v があろうと無かろうと、運動方程式には全く関係ありません。運動方程式は力と加速度の関係式ですから。速度 v があっても、むりやり力に変換するような行為は絶対にやめましょう。

2.15.8　運動方程式を使った問題 2

もう 1 問、同じような問題ですが、今度は摩擦力が発生する問題を考えてみましょう。

問 2：図 33 のように、三角台上を質量 m[kg] の物体が初速度 v[m/s] で x 軸と逆方向へ上っている。このとき台と物体との間には動摩擦力が働き、動摩擦係数は μ' であるとする。小物体 m の加速度を求めなさい。

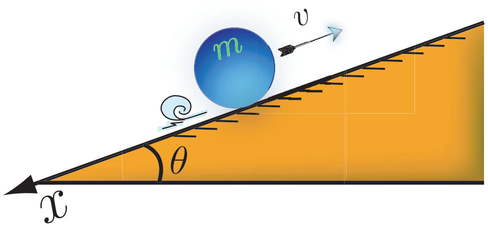

図 33: 三角台上の運動

解答：今回は動摩擦力が発生します。摩擦力の描き方は大丈夫ですよね？もし不安な方は摩擦力のページをご覧下さい。では、加速度を求めるために運動方程式が利用できそうですね。しかしその前に注意事項を説明しておきます。

注意事項とは動摩擦力の方向のことなんですが、これは加速度の方向とは無関係です。摩擦力というのは現在の移動方向と逆方向にかかるものです。勘違いされそうですが加速度というのは 1 秒間にどれだけ速度が変化するかという量であって、現在どちらに進んでいるかということは表しません。では現在どちらに進んでいるかというのを表す量は一体何でしょう？…もちろん速度ですね。

つまり速度 v の方向を見て物体がどちらに移動しているのかを確認し、摩擦力の発生している方向（接触する溝を確認して、接触点方向に対して逆向き）を決定するのです。

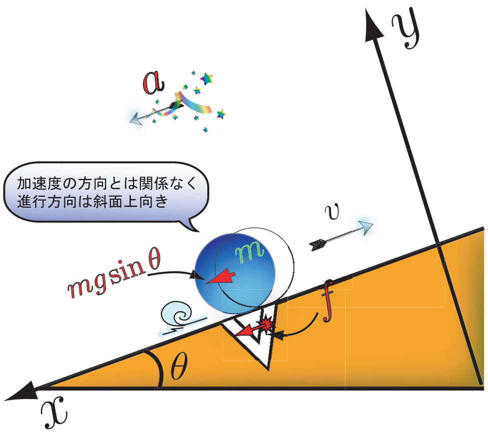

図 34: 動摩擦力の方向

今回は物体が持つ速度は x 軸負方向ですから、摩擦力の描き方のページでご説明しましたように、V 字型の溝の右側が接触します。物体は小さな三角形の方なので、物体には x 軸正方向へ動摩擦力 f がかかります。

ここさえ押さえてもらったら、後はいつも通り運動方程式を立てる手順に従って手順 4 まで終わった図を図 34 に示します。

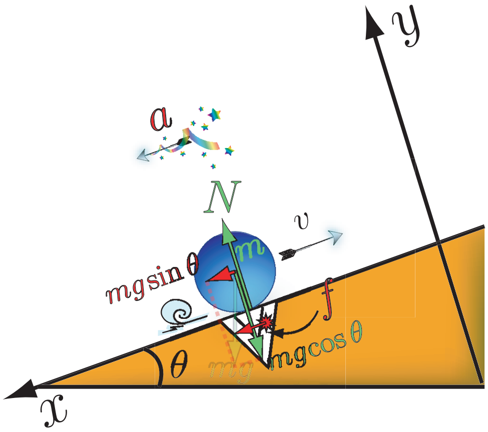

図 35: 物体に働く全ての力と軸を描き込む

では、ここから最初にやらなくてはならないことと言ったら…当然動摩擦力の大きさを求めることです。動摩擦力は

$$f = \mu' N \tag{21}$$

でした。さて N が知りたいわけです。…というわけで、もちろん y 軸方向の力のつり合いの式から求まりますね。

$$N = mg\cos\theta \tag{22}$$

です。したがって、動摩擦力は N を式 (21) に代入して

$$\begin{aligned} f &= \mu' N \\ &= \mu' mg\cos\theta \end{aligned} \tag{23}$$

となります。これでようやく x 軸方向の加速度を求めることが出来ます。加速度 a は当然 x 軸正方向へ向いていますので

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\theta + f \\ &= mg\sin\theta + \mu' mg\cos\theta \\ &= mg(\sin\theta + \mu'\cos\theta) \end{aligned} \tag{24}$$

と書けます。（もうわざわざ私が $ma =$ …で止めなくても大丈夫ですよね？）したがって、求める加速度 a は式 (24) より

$$a = g(\sin\theta + \mu'\cos\theta) \tag{25}$$

となりますね。どうでしょう？今回は摩擦力が発生していたため、少々難しく感じたかも知れませんが、毎回このようにまずは垂直抗力 N を用いて $f = \mu' N$ としておき、その後ちゃんと N を求めるという手順を踏めば、確実に答えを出すことが出来ます。ちゃんと解けるようになるまで、しっかりと読み直し、そして解き直してください。