2.5　相対速度と加速度

相対速度および加速度が苦手な高校生は結構いますね。その大きな原因は、やはりベクトル量の認識不足だと思います。そもそも物理が苦手なのはこれが大きな原因だと思いますが…。

しかし、逆に言うとベクトル量さえ分かれば、割とすんなり理解できる内容です。是非「力学」の「速度とは」から読んでいただきたいと思います。

さて、教育とは受け継がれるものです。私の中の情報もまた先人の多くの知恵と工夫をなされたアイデアを吸収することにより構築されたものです。その中の情報を私の中のほかの情報と結合し、工夫し、そして創出して、ここに発現させています。

これから書く相対速度のお話は、基本的な概念に関しては故 前田和貞先生の相対速度の概念を踏襲したものですが、私自身は彼の授業を教わったことはありません。「まえがき」でも書きましたが、「標準問題精講」内の前田先生の考え方に大きく影響されたことに依ります。しかし、少々改良の余地があったため手を加えた形で紹介させていただきます。

2.6　相対速度

相対速度とはどのようなものでしょうか？相対…何やら言葉が難しいですか…。でも大したことはありません。何なら易しく言い換えましょう。「相対」とは「相手に対する自分の…」です。つまり、「相対速度」とは「相手に対する自分の速度」です。もちろん逆も成り立ちます。つまり「自分に対する相手の速度」でも OK です。（相対の意味が原義とは微妙に異なりますが、とりあえずこのように理解していただいて結構です。）

もちろん速度と言っていますから、ベクトル量を扱うわけです。ベクトル量で大事なことと言ったら…もう再三言って来たから大丈夫ですよね？…そうです。軸です。

つまり軸神が設定する正の方向を向いているならば正、逆方向を向いているならば負と扱うわけです。

では具体例を挙げて考えてみましょう。

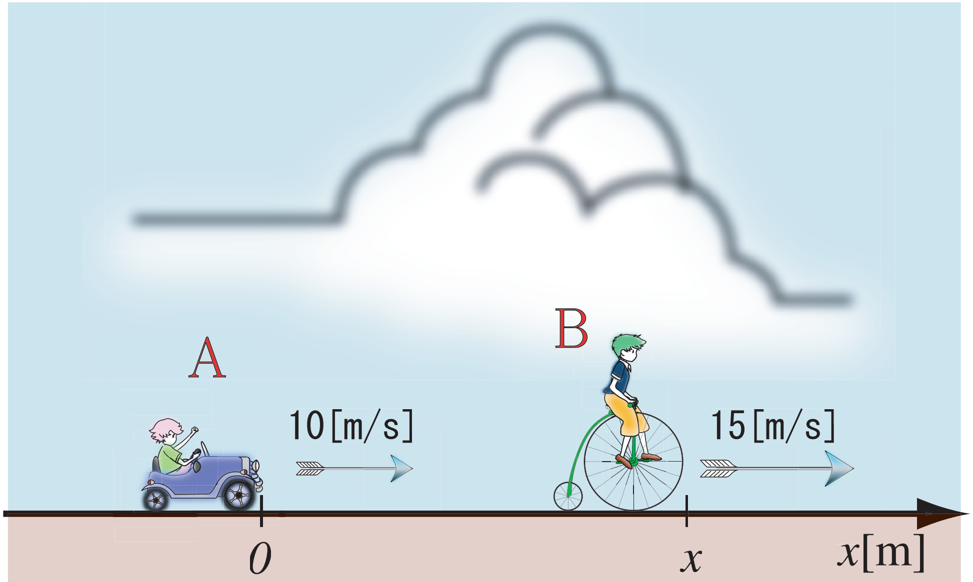

図 1: 2 物体の運動

今図 1 のように物体 A が 10[m/s] で、物体 B が 15[m/s] で共に軸方向へ進んでいるとします。そうすると物体 A から見て物体 B はどのように見えるでしょうか？…車に乗って前の人を見るとどのように見えますか？という質問と全く同様です。ですから、簡単に想像出来ますね。そうです。もちろん 5[m/s] で軸方向へ進んでいるように見えます。

でも毎回毎回想像しやすい問題か？というとそうでもありませんし、速度が文字になったときに途端に出来なくなってしまう人が多いのです。ですから、相対系を扱うツールをご紹介します。まずは運動を定義しないとどれとどれの相対速度を扱うのか分かりませんね。では図 2 をご覧下さい。今度は速度を文字にしました。

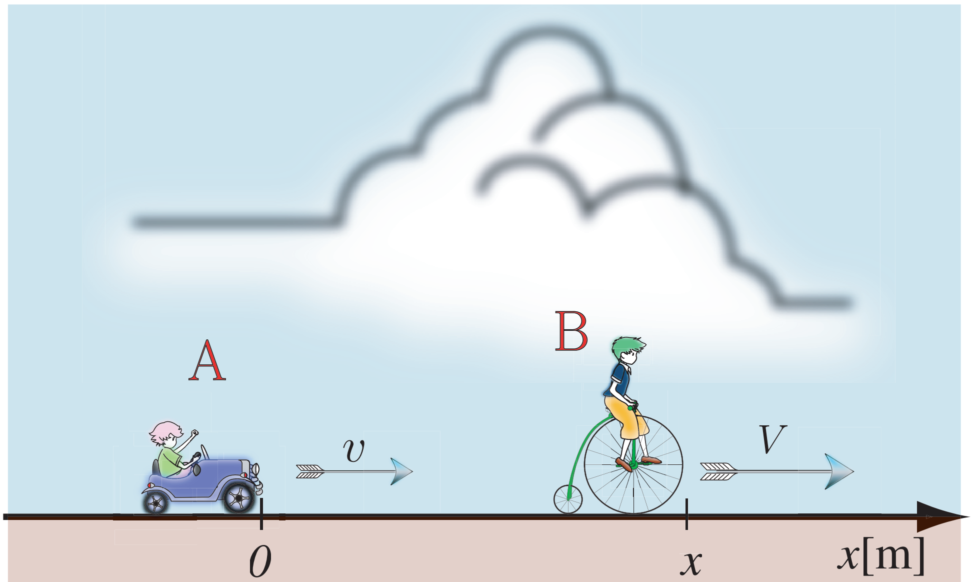

図 2: 2 物体の運動

この図において、A の速度は v[m/s]、B の速度は V[m/s] となります。ここで「A に対する B の相対速度 v_{AB}」を考えてみましょう。v_{AB} は $v_{A \to B}$ という意味です。A から見た B の速度ということですね。つまり、「A に対する…」と言われたら、「A を基準として…」と読み換えてみましょう。ベクトル量とは即ち

「何かを基準としたときの、もう一方の位置と大きさ」を表すものです。ですから相対速度も今までのベクトルの扱い方と何ら変わりませんね。

さて、相対系を扱うツールを紹介するのでした。では、次の図 3 をご覧ください。

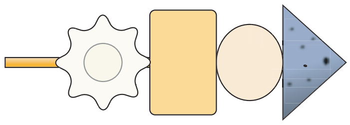

図 3: おでん

おでんです。…「ちくわぶ」に「だいこん」に「たまご」と「こんにゃく」…なんて説明は絶対に要らないでしょうが、使い方の紹介の前に構成を説明しなくてはなりませんね。

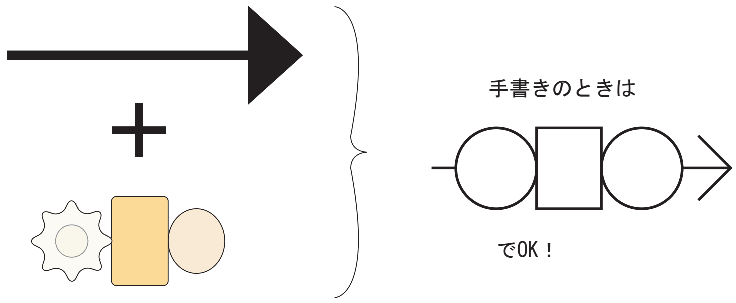

図 4: おでんの構成

実は図 4 のようになっています。「串」と「こんにゃく」で軸を表しています。手書きのときは当然図 4 の右に描いたように、最初に○□○と書いて、そのあとで→を後ろに書くという感じで書いて下さい。

では図 2 の運動をどのようにおでんで処理するのかをご説明致します。

まずは図 3 のおでんの各要素「ちくわぶ」「だいこん」「たまご」の中に、運動をしている系の中から必要なものを書いていきます。

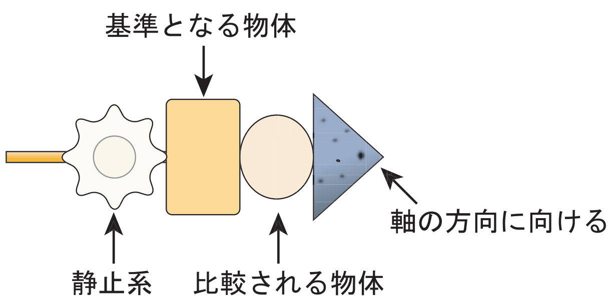

図 5: おでんの各要素

第一に「ちくわぶ」。この一番ひだりの枠には「静止系」を記入します。基本的には「地面」だと思ってください。図中には面倒なので「地」と書いておきます。

ところで静止系と言われてもよく分かりませんよね。静止系とは、今注目している物体系において止まっていると考えられるものを指します。実際は地球も公転しているわけですが、地球上の物体はすべて地球の等速度運動と共に、同じ等速度運動をしていますので地球上の物体の運動を見る際、地球は止まっているように見えるわけです。ですから静止系は地球となります。イメージし易いように図 6 に静止系（地球上）における観測者 O を描いておきます。

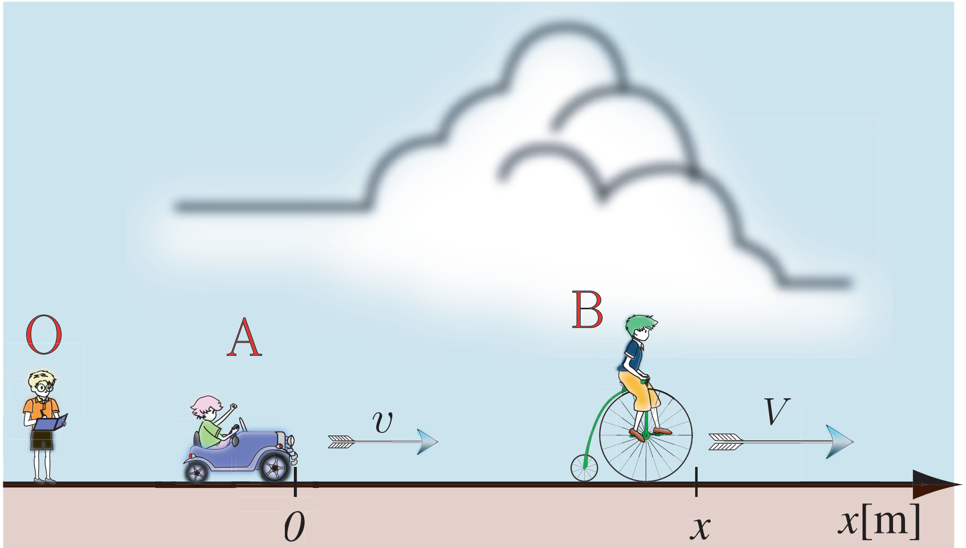

図 6: 静止系のイメージを追加

次に「だいこん」。これはとても重要なのでしっかりと覚えておいてください。皆さんの方は□ですね。この「だいこん」には相対系を処理する「基準となるもの」を書き込みます。今回は A が基準でしたから「A」と書き込みましょう！

最後に「たまご」ですが、これは「基準となるもの」によって「比較される対象」を書き込みます。今回は基準 A によって見られるのは「B」でした。ですから「B」と書き込みます。そうすると図 7 のような図になります。

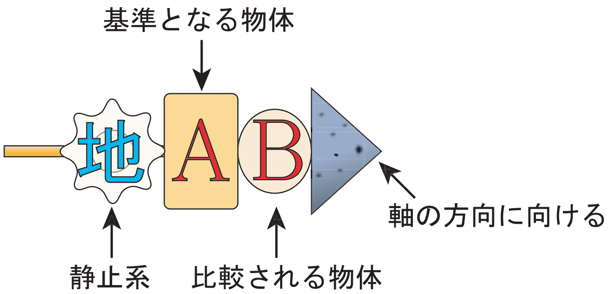

図 7: 要素を埋め込む

では次に静止系（O）から見た各物体の速度を考えるために、まずは「ちくわぶ」から各物体を表すおでんの「要素」に弧を描くように矢印を書きます。さらに、注目している基準となる物体 A からも比較される対象 B に対して矢印を書いておきます。すると図 8 のようになります。当然これらの矢印は軸の正方向を向いている矢印です。

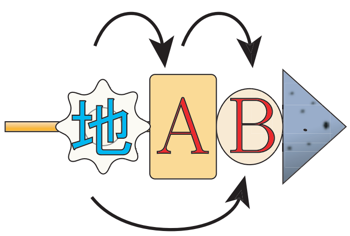

図 8: 静止系からの矢印を書く

ここで、静止系（O）から見たそれぞれの物体の速度 v と V を対応する矢印の弧の部分に書き入れます。A は速度 v、B は速度 V でしたね。もし図 6 において v や V が負方向を向いていればここで $-v$ や $-V$ と書き込むところですが、今回はどちらも軸の方向を向いていますので問題なく v や V と代入します。

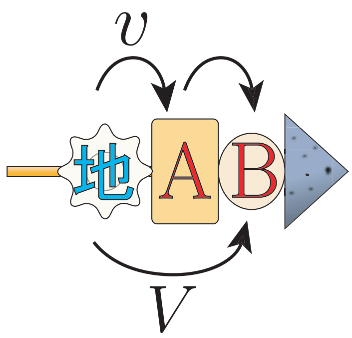

図 9: 矢印に値を書き込む

この弧を描いた矢印は実際はベクトル量でして、図 10 の右の図のようになっています。

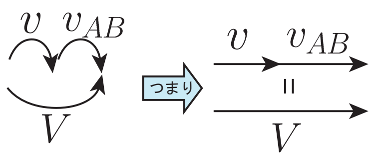

図 10: 各矢印の関係

つまり $v + v_{AB}$ が V と等しくなっているわけです。ですから当然式で書くと

$$v + v_{AB} = V \tag{1}$$

となります。式 (1) からすぐに $v_{AB} = V - v$ と求まりますね。でもそういう式変形を考えなくても図 9 を見れば一発でわかるわけです。大きい矢印（V）は小さい矢印（v と何も書いてないもの）を二つ足したものですから、小さい矢印の何も書いてない残り方は、大きいもの（V）から小さい方（v）を引けばいいですね！

$$v_{AB} = V - v \tag{2}$$

ですから、すぐに図 11 のように書き込みます。

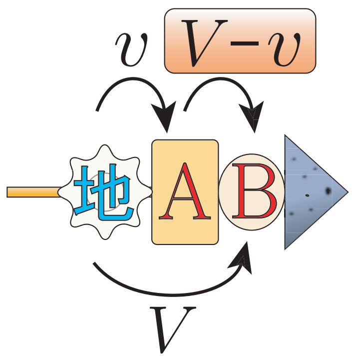

図 11: 残りの値を書き込む

さて、実はこれで既に相対速度が求まっています。図 11 の「だいこん」から「たまご」への矢印は今求めたい「A に対する B の相対速度」ですね。A を基準に見てますから。ですから、A に対する B の相対速度 v_{AB} は $V - v$ だとわかります。皆さんは手書きで書きますので、図 12 のようになったはずですね。

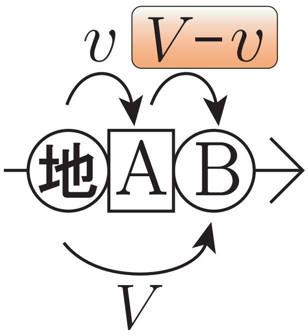

図 12: 手書きの場合

実は相対加速度も全く同じ考え方ですので、「相対速度・加速度」に関するお話はここで終わりです。しかし、ちゃんとこの「おでん矢印」が使えるかどうか心配ですよね？ですからいくらか問題を出したいと思います。

2.7 相対速度・加速度に関する問題

問 1　物体 A に対する物体 B の速度を求めよ。

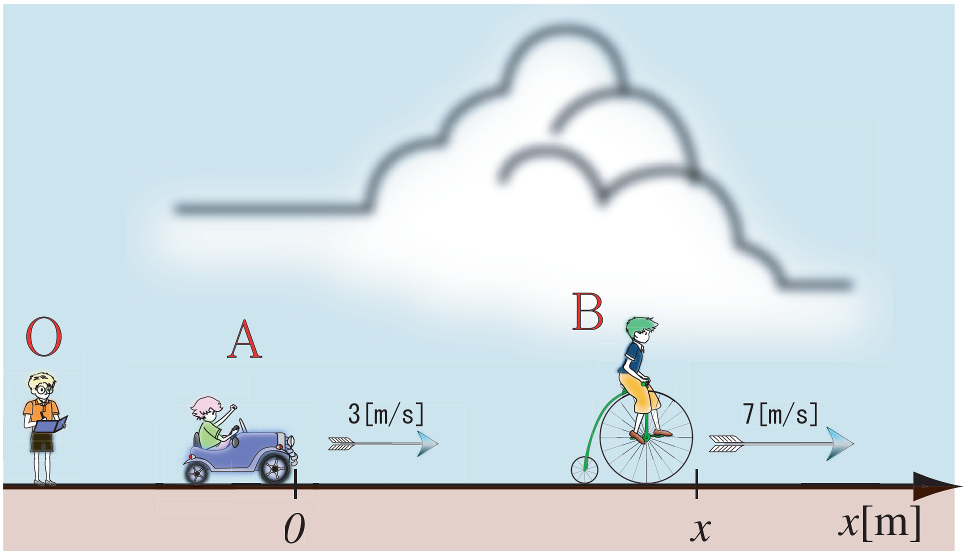

図 13: A に対する B の相対速度

では「おでん矢印」で考えてみましょう。「A に対する…」ですから基準は A ですね。したがって「だいこん」に「A」を、「ちくわぶ」には「地」を、「たまご」に「B」を書きましょう。矢印を書いてください。その後で、地面から見た A と B の速度（もちろんベクトル量ですから軸方向が正ですよ）を書き込みましょう！そうすると「A から見た B の相対速度」を v_{AB} と書くと

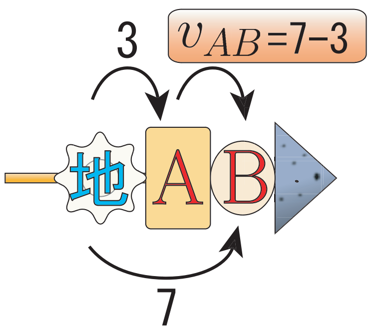

図 14: おでん矢印に書き込む

$$v_{AB} = 7 - 3 = 4 \quad [\mathrm{m/s}] \tag{3}$$

つまり A から見ると B は 4[m/s] で軸方向へ進んでいるように見えるわけです。

問 2　図 13 において物体 B に対する物体 A の相対速度を求めよ。

では次に「物体 B に対する物体 A の相対速度」を求めてみましょう。今度は「物体 B に対する…」という文ですから基準が「B」となります。では、「だいこん」に B を書き込みましょう。比較される対象は「A」ですから「たまご」が「A」、静止系は「地」ですね。

矢印を書いたあとで、地面に対する A と B の速度を書きましょう。先ほどと同じで A は 3[m/s]B は 7[m/s] ですね。しかし、A と B が交換されてますから気をつけてください。ちゃんと図を描くと、図 15 のようになります。

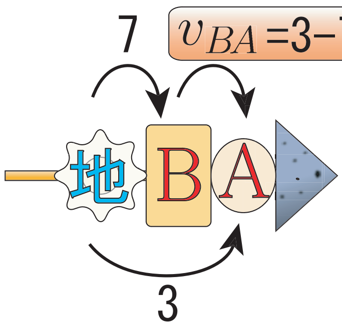

図 15: おでん矢印に書き込む

つまり

$$v_{BA} = 3 - 7 = -4 \quad [\mathrm{m/s}] \tag{4}$$

となります。物体 B から物体 A を見ると、v_{BA} の符号が負になってますから、軸と逆方向へ 4[m/s] の速さ（大きさですね）で去っているように見えるわけです。

次に相対加速度を求めてみましょう。

問 3　物体 A に対する物体 B の相対加速度を求めよ。

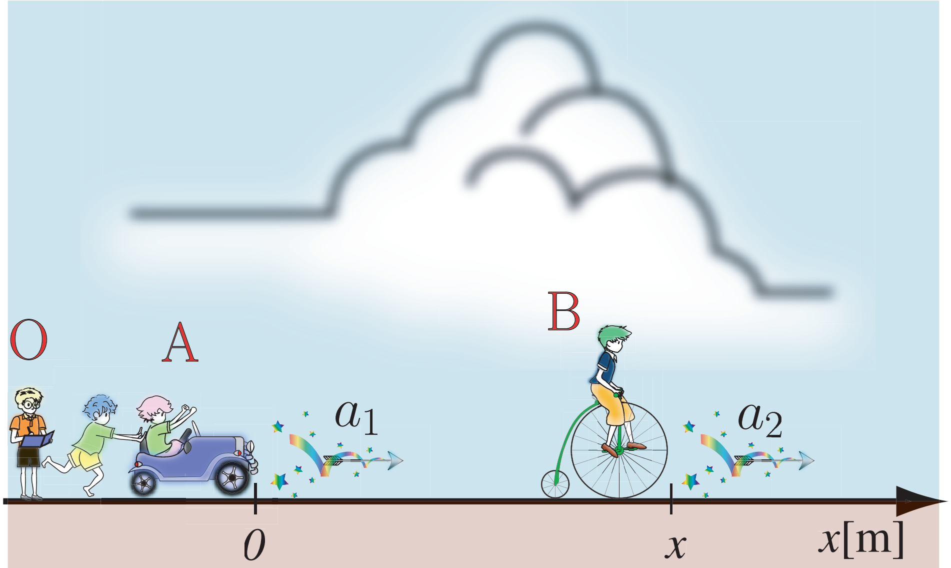

図 16: ともに加速度運動

図 16 の 2 物体 A、B は共に加速度運動をしています。物体 A の加速度は a_1[m/s^2]、物体 B の加速度は a_2[m/s^2] です。最初に述べましたように、相対速度も相対加速度もどちらも同じ解き方で解けます。つまり、単位さえ間違わなければとても簡単なんです。

軸の方向に注意して、基準となる物体は A であることを確認し、おでん矢印に各値を記入していきます。

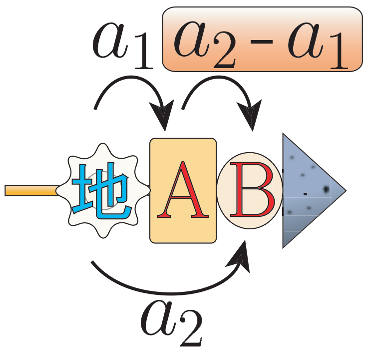

図 17: おでん矢印に書き込む

$$a_{AB} = a_2 - a_1 \quad [\mathrm{m/s^2}] \tag{5}$$

とっても簡単でしょ？すぐに解りますね。ちなみに式 (5) が言っているのは、「物体 B は物体 A から見ると、軸の方向へ $a_2 - a_1$[m/s^2] の加速度で移動しているように見える」ということです。$a_2 - a_1$ が負の場合は軸と逆方向、正の場合は軸の方向となります。

問 4 図 18 のように車が速さ $2\sqrt{3}$[m/s] で走っているとき、風がない状態で、雨が鉛直方向に対して 60 °の角度で前方から降ってくるように見えた。雨滴の落下の速さはいくらか。

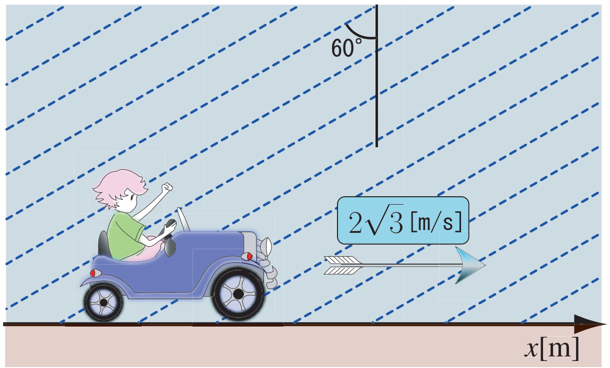

図 18: 雨が降ってきた

さて、典型問題です。これは水平方向と鉛直方向の 2 軸に分けて考えればすぐに分かります。では考えてみましょう。

雨滴の速さが問われていますので、雨滴の速さを v_1 として、下向きに設定しましょう。そういえば鉛直方向の軸が設定してありませんね。雨の落下方向を正にしていた方が後々都合が良いですから、下向きを正として y 軸を設定しておきましょう。

車の速さは与えられていますが方向は与えられていないため、勝手に図 18 のように右向きに x 軸を設定しました。では車の速度も x 軸向きに $2\sqrt{3}$[m/s] としましょう。また雨の x 軸方向の速さを v_2 として設定します。さらに、車の y 軸方向の速さも v_3 として設定しましょう。

問題では「車」から見て「雨」が鉛直方向と 60 °の角をなしていたので、基準は「車」とした方がよいようです。では x 軸方向と y 軸方向、それぞれに対する相対速度を求めましょう。もちろん矢印の方向は軸方向ですよ。

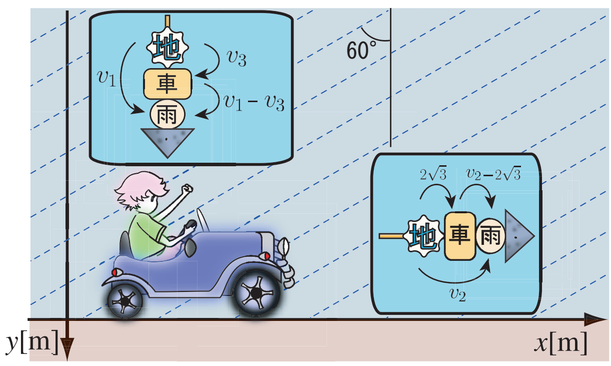

図 19: 各軸における相対速度

ここで少々常識が必要となります。

- 風が無いので、雨は y 軸方向へ落ちる（x 軸方向の速度成分はない）
- 車は x 軸方向の速度成分のみを持つ（y 軸方向へは移動しない）

そうしますと $v_2 = 0$[m/s]、$v_3 = 0$[m/s] となりますね。ですから、車から見た雨の x 軸方向と y 軸方向の相対速度は

$$x \text{ 軸方向} : v_x = -2\sqrt{3} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{6}$$

$$y \text{ 軸方向} : v_y = v_1 \quad [\mathrm{m/s}] \tag{7}$$

となります。v_x が負になっているのは、車から見て雨滴は、実際は x 軸方向と逆方向へ速さ $2\sqrt{3}$[m/s] で移動しているように見えるということですね。そしてここまで出れば後は簡単です。あとは車から見て雨は 60 °の方向へ移動しているように見えたわけですから、

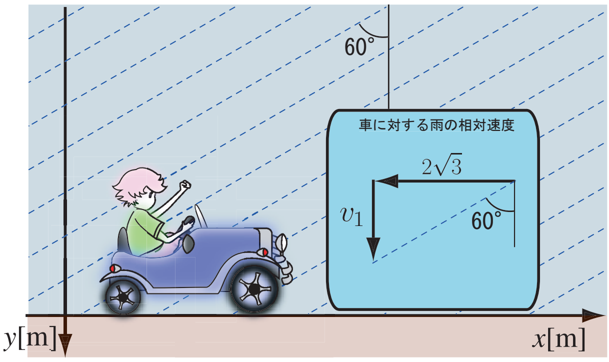

図 20: 車に対する雨滴の相対速度

ちょうど角度 30 °の三角形が見えます。後は比より $1 : \sqrt{3} = v_1 : 2\sqrt{3}$ より $v_1 = 2$[m/s] と求まりますね。

どうでしょう？相対速度・加速度の考え方は分かっていただけたでしょうか？