2.4 $v-t$ グラフから解ること

$v-t$ グラフは現在の高校物理においては欠かせないツールになっています。なぜなら現高校の課程では微分方程式が使えないからです。私が高校生だった頃、私の代から新しく新課程になって、それまで数学にあった微分方程式が無くなり、代わりに複素数が入ってきました。

複素数はとても難しく受験生は慌てふためきましたが、理解するととても強い武器になり、さらには大学に入って当然のごとく使う複素数に全く物怖じせず戦えるという意味合いでとてもよい編成だったと思いますが、何年経ってもやはり複素数は難しかったらしく、とうとう過程から消え去ってしまいました。とても残念です。(私は複素数が大好きだったので…)

ところで、物理にはグラフの軸に関してもルールがあります。ではそのルールについてちょっとお話ししょう。

まずは数学におけるこのグラフをご覧下さい。

図 1: 数学の軸

この軸を皆さんは何と呼ぶでしょうか?「直交座標」でももちろん結構ですが、x や y を使うと…$x-y$ グラフと呼びますね。横軸から先に読んでます。では物理の軸では…と言いますと

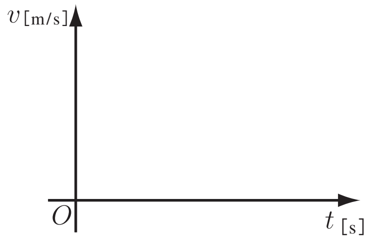

図 2: 物理の軸

このような場合、物理では $v-t$ グラフという風に呼びます。つまり縦軸の方を先に読んでます。まぁもちろんこの話の展開から、すぐに予想できたでしょうが、しかし実は大事なルールです。しっかり覚えておいてください。

2.4.1 運動を $v-t$ グラフへ

では実際に運動を $v-t$ グラフに変換してみましょう。次の運動をご覧下さい。

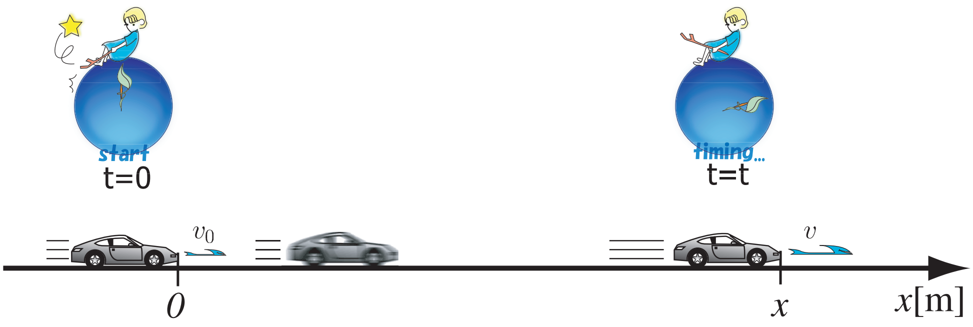

図 3: 等加速度運度

物体（車）がちょうど $x=0$[m] を通過したときの時間を $t=0$[s] に、そしてそのときの速度を v_0[m/s] とします。そのまま等加速度運動をした物体は $x=x$[m] の位置に達したとき $t=t$[s] で、そのときの速度を v[m/s] となりました。これを $v-t$ グラフに描いてみましょう。($x=x$[m] や $t=t$[s] 等の表現は大丈夫ですよね？最初の文字 x や t が物体の位置や時間の変数を表し、次の文字 x や t が、そのときの具体的な値を示しています。$x=x$[m] を例に取りますと、「物体がある位置は x[m] です」という意味になります。)

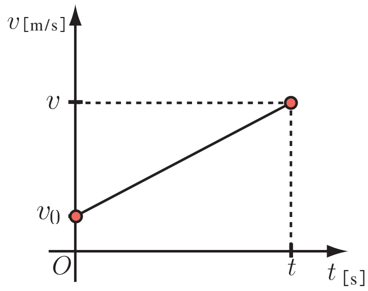

図 4: v-t グラフ化

解るでしょうか？…もしかしたらこのように、運動から $v-t$ グラフに変換するのが苦手な人も多いかも知れませんね。…今回は最初なので、丁寧に変換の仕方を見ていきましょう！

まずは、これから作るグラフの軸が示す変数の値を確認します。今回は縦軸が v[m/s]、横軸が t[s] となります。

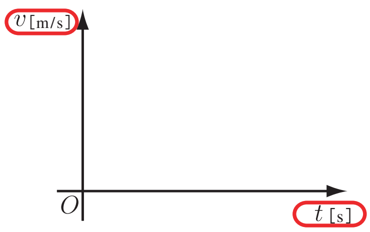

図 5: 軸の変数に注目

次に物体が運動している図を確認します。グラフの横軸は時間 t[s] ですから、運動における時間を確認しますと、

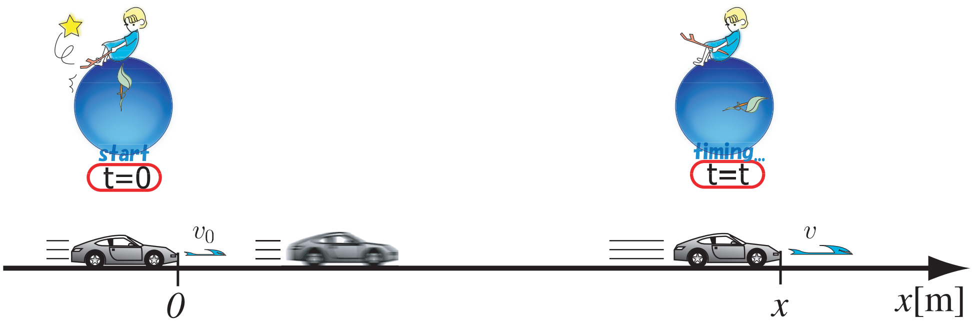

図 6: 時間の確認

図 6 のように $t = 0[\mathrm{s}]$ と $t = t[\mathrm{s}]$ と解ります。ですから図 5 にその値を書き込みましょう。

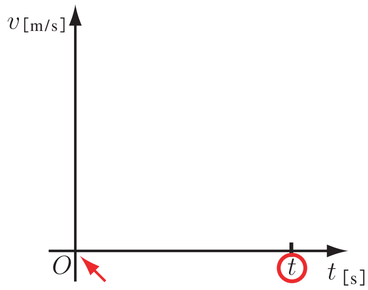

図 7: t 軸に運動の時間を書き込む

今回は原点 O で $t = 0[\mathrm{s}]$ は分かるでしょ？という意味を込めて $t = 0[\mathrm{s}]$ は書かずに、$t = t[\mathrm{s}]$ だけを書き込みました。

　さて次に縦軸に移りましょう。さきほど確認しましたように、$v - t$ グラフの縦軸は $v[\mathrm{m/s}]$ 軸ですから、図 3 の運動から $t = 0[\mathrm{s}]$ のとき $v = v_0[\mathrm{m/s}]$、そして $t = t[\mathrm{s}]$ のとき $v = v[\mathrm{m/s}]$ ということがわかります。時間（横軸）との対応関係もしっかりと確認して下さいね。

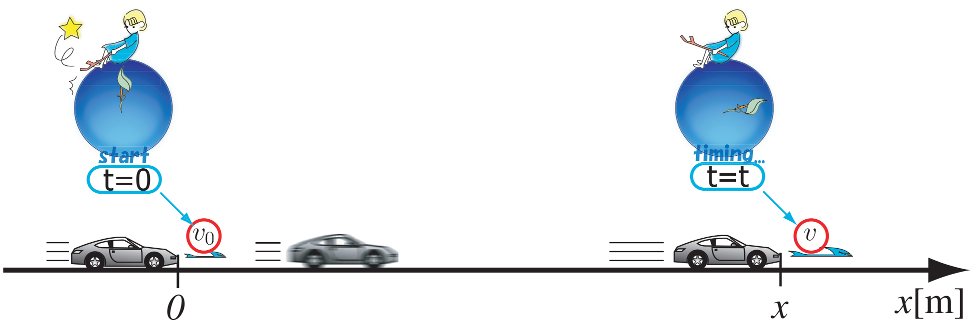

図 8: 時間に対応する速度のチェック

では、これも $v - t$ グラフの縦軸に記入しましょう。…!!!実は大事なお話がありました。もう当然意識しているとは思いますが、速度はベクトル量です。ですから $v - t$ グラフの軸の正の値は当然「運動の図」の軸神が決める正を表します。今回はどちらも正の方向を向いてますので、$v - t$ グラフにおいても正の値として記入します。

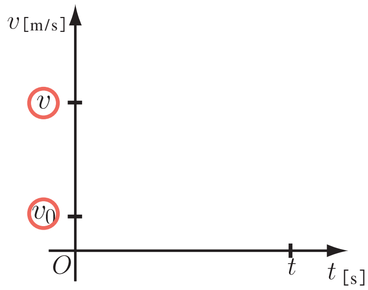

図 9: v 軸に時間に対応した速度を書き込む

これで各軸の値がわかりました。では、それぞれの交点を求めて、グラフを完成してみます。

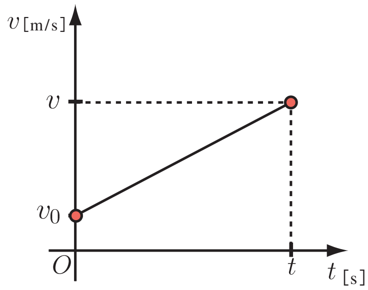

図 10: $v-t$ グラフ完成

$v-t$ グラフと運動の関連を見てみましょう。

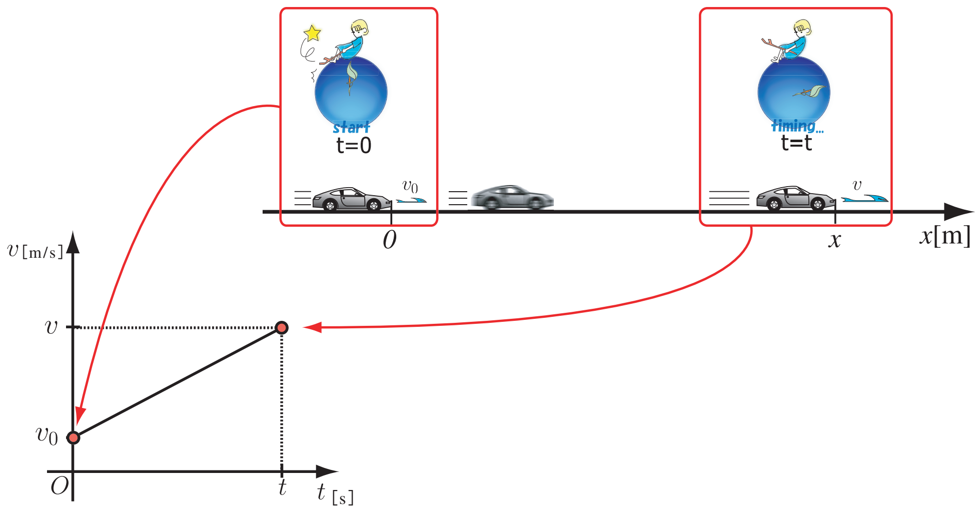

図 11: $v-t$ グラフと運動の関係

ちょっと丁寧すぎましたか…。しかし以後は同じようにやることを前提で、いきなり図を描きますから、しっかりと理解しておいてくださいね。

2.4.2 $v-t$ グラフから読み取れるもの

では、皆さんは図 12 からどのようなものが読み取れるでしょうか？

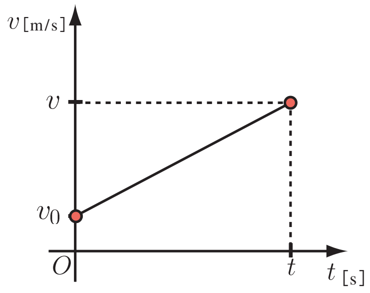

図 12: $v-t$ グラフ

もちろん t 軸の $t=0$[s] や $t=t$[s]、さらに v 軸の $v=v_0$[m/s] や $v=v$[m/s] も読み取れるでしょう。しかし、それ以上にこのグラフには有用な情報が隠れています。ではそれを考えていきましょう。

ここで、もう一度数学の「直交座標」に登場してもらいます。

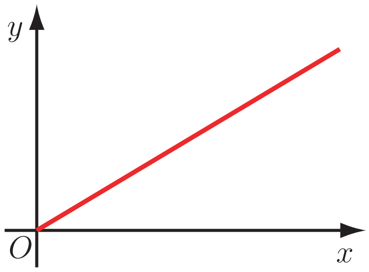

図 13: 数学の軸

今回は直交座標内に直線を引きました。さてこの直線の傾き m はどのように表されるでしょう？

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

ですよね。Δ は変化量を表します。つまり Δx であれば「x の変化量」という意味になります。

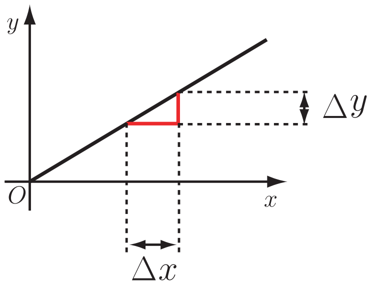

図 14: 直線の傾き

この傾きがどのくらい有用なのかはいつか数学の方で語ることにしまして、では物理における $v-t$ グラフの傾きはどのようになるのでしょうか？

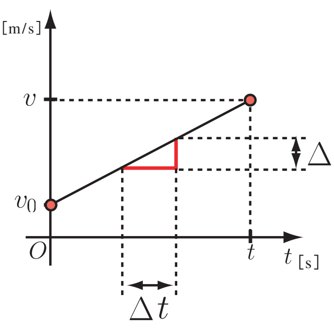

図 15: $v-t$ グラフ

もちろん軸が $x-y$ ではなく $v-t$ ですから、傾きは

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2}$$

となります。これを見て何か思い出すことはありませんか？…速度変化を時間変化で割ったもの…。つまり「1 秒間あたりの速度変化」…そうです。加速度ですね。すなわち $v-t$ グラフにおける直線の傾きは「加速度」を表すわけです。

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a \tag{3}$$

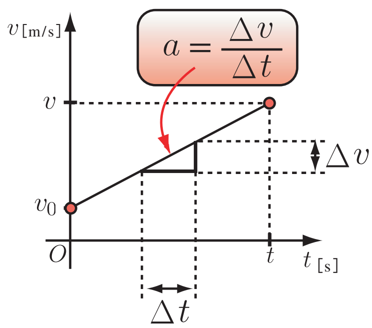

図 16: $v-t$ グラフの傾きは加速度

せっかくですから、グラフ中にある値を使って、この運動の加速度を求めてみましょう！

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{v - v_0}{t - 0} \\ &= \frac{v - v_0}{t} \end{aligned} \tag{4}$$

となりました。この式 (5) は後で使いますのでしっかり覚えておいて下さい。

$v-t$ グラフの傾きがそのときの運動の加速度を表すことがわかりました。しかし $v-t$ グラフからわかることはそれだけではありません。では他にどのようなことが読み取れるのでしょうか？次の運動をご覧下さい。

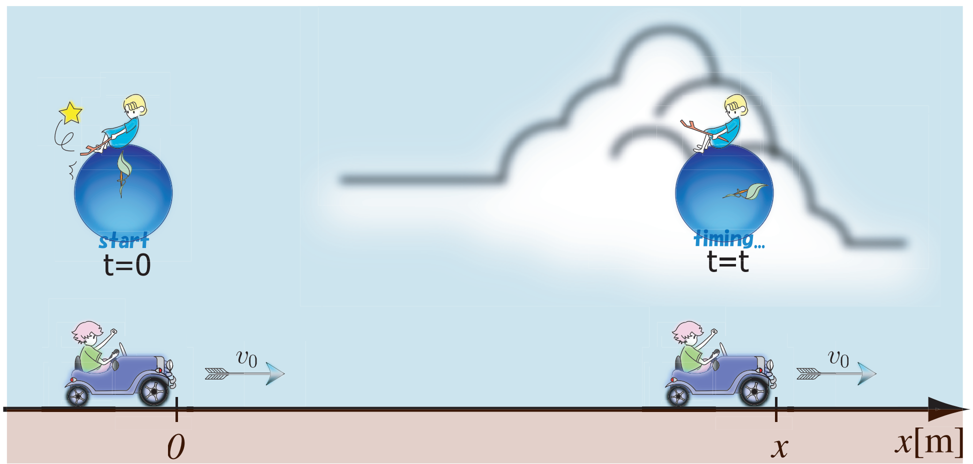

図 17: 等速度運動

普通の速度 v_0[m/s] での等速度運動です。これを $v-t$ グラフで表すと

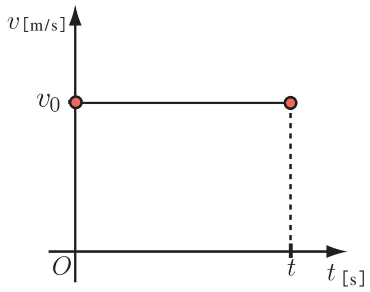

図 18: 等速度運動の $v-t$ グラフ

となります。…ここで小学生のときからずっとやって来てますよね。等速 v_0[m/s] で t[s] 間進んだときの距離はどれだけになるでしょう？

$$x = v \times t \tag{5}$$

$$[\mathrm{m}] = [\mathrm{m/s}] \times [\mathrm{s}]$$

おそらく意味もわからず「はじき」だの「みはじ」だの言って覚えている方も多いでしょうが、これからはちゃんと単位で読み取ってくださいね。速度というのは「1 秒間にどれだけの距離進むかを表す値」というのが定義ですから、t 秒間で進んだ距離が知りたいのならば、その v に t をかければいいだけの話ですね。そうすると t 秒間で進んだ距離が分かります。式 (5) の単位表記を見ていただけば、一目瞭然ですね。

ではその t 秒間で進んだ距離は、図 18 においてどこに現れてくるのでしょう？進んだ距離 x は式 (5) のように表されていますから…

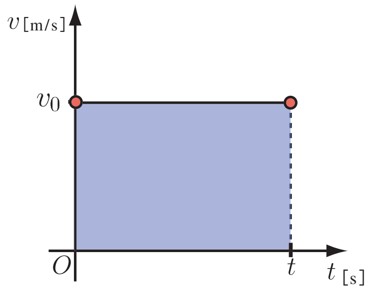

図 19: $v-t$ グラフにおける面積

図 19 のように表されますよね。$v_0 \times t$ で表される距離 x は $v-t$ グラフにおいて面積で表されます。これは、実際には微小時間 Δt 秒間に進んだ距離 $\Delta t \times v_0$ を時間 0[s] から t[s] まで加え合わせたものになります。

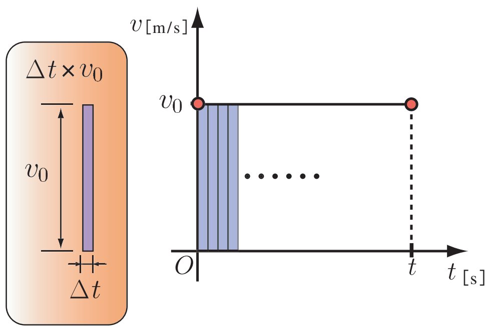

図 20: 微小面積の和

では、今回の運動の場合を考えてみましょう。もう一度今回の等加速度運動の図を出します。

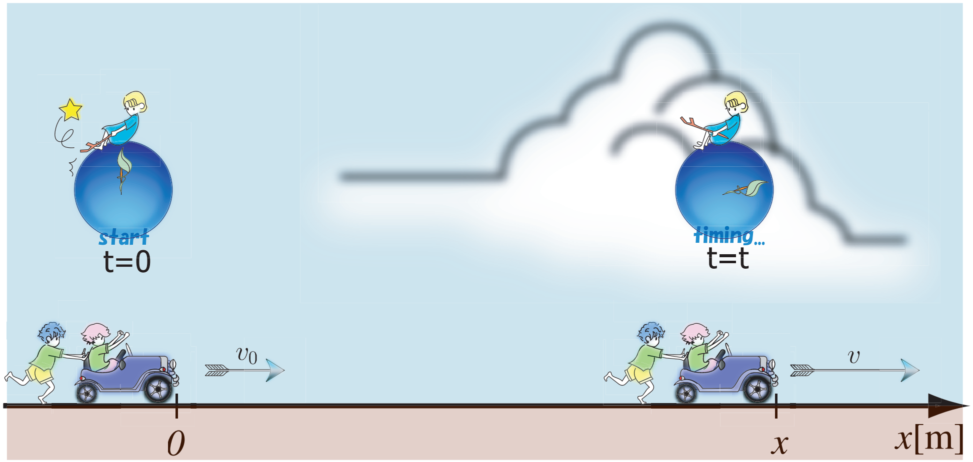

図 21: 等加速度運動

ちょっと図を変えてしまいました。こっちの方が、穏やかな感じでやわらかいから物理が楽しくなぁ…とか思ってではなく、時の神が少々浮いている間があったので、全体をそちらに合わせたというのが本音ですが…。（この図の構想から作図までに 6 時間ほどかかってしまい…そのせいで自宅でのノルマに影響が…）

さて、妹を後ろから押して加速してあげるお兄ちゃんの図ですが、もちろん彼には等加速度運動をやってもらいます。ちょっと辛いですけどね（ ^^ ;)

図 21 の運動の $v-t$ グラフを再度、図 22 に示します。

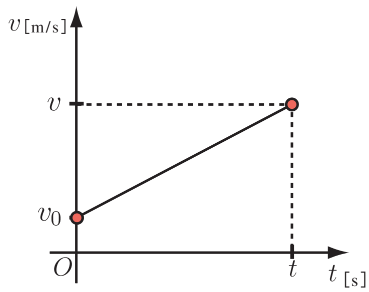

図 22: $v-t$ グラフ

図 19 と図 20 で学んだように、$v-t$ グラフにおいて微小時間での $\Delta t \times v$ の和は進んだ距離になります。ですから

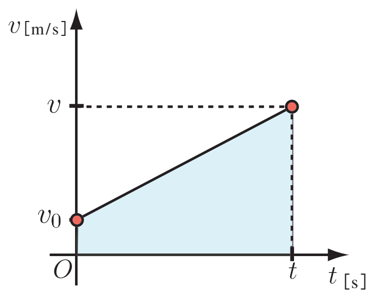

図 23: $v-t$ グラフにおける面積

これはすぐに解るでしょうか？さっきの微小時間に進む距離の和がトータルで進んだ距離の和というのを思い出してみましょう。

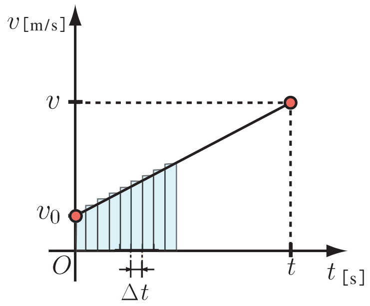

図 24: 微小時間に進む距離の和

図 24 のように、微小時間 Δt の間に進んだそれぞれの距離 $\Delta t \times v'$[m]（v' はその時々の速度）の和を $t = 0$[s] から $t = t$[s] までとるとその間に進んだ距離を表します。ここで図 24 においてちょっと直線からはみ出した領域が気になる人がいるかもしれませんが、それは Δt を限りなく小さくしたら全く問題なくなりますね。だって、はみ出す部分は近似的になくなりますから。だから結果図 23 の領域になることは理解できますね。

ではその $t = 0$[s] から $t = t$[s] までの間に進んだ距離を求めてみましょう。

求める際は以下のように面積を二分します。

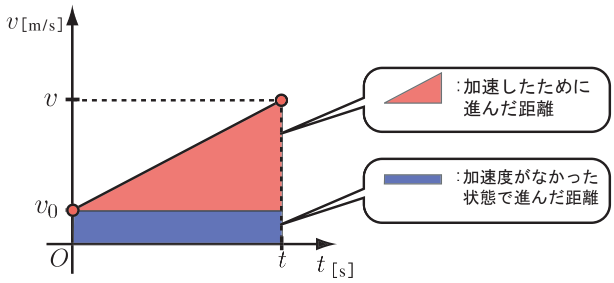

図 25: 二分された面積

青の領域は等速で進んでいたときの距離 x_1[m] です。これは前に図 19 でも示しましたね。アレと同じです。そして赤の領域は加速をしていたせいで余計に進んでしまった距離 x_2[m] です。この領域が図 19 に加えられるのです。ではその二つの和 x[m] を出してみましょう。

$$x_1 = v_0 \times t \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{t \times (v - v_0)}{2} \tag{7}$$

$$x = x_1 + x_2 = v_0 \times t + \frac{t \times (v - v_0)}{2} \tag{8}$$

ここでもう一度式 (5) を思い出してください。$a = (v - v_0)/t$ でしたから、式 (8) 中の $v - v_0$ は $v - v_0 = at$ と書けますね。ですから式 (8) は

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= v_0 \times t + \frac{t \times at}{2} \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \tag{9}$$

となります。ちなみに、式 (5) は変形して v を求める式にすると

$$v = v_0 + at \tag{10}$$

と書けます。この 2 つ何やら見覚えのある方も多いかと思います。…というか見覚えがないとダメです。力学の基本 3 公式（こう言ってるのって私だけ？）のうちの 2 つですね。では 3 つ目はどうするかと言いま

すと…式 (9) と (10) を連立させて t を消去するんです。式 (10) より $t=(v-v_0)/a$ ですから

$$
\begin{aligned}
x &= v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\
&= v_0\cdot\frac{(v-v_0)}{a}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{(v-v_0)^2}{a^2} \\
&= \frac{v_0(v-v_0)}{a}+\frac{(v-v_0)^2}{2a} \\
&= \frac{(v-v_0)(2v_0+v-v_0)}{2a} \qquad (11)\\
&= \frac{(v-v_0)(v+v_0)}{2a} \\
&= \frac{v^2-v_0^2}{2a} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

式 (11) では、分子にそれぞれ $(v-v_0)$ があるからそれを共通項としてくくっています。計算が楽になりますね。ということで式 (12) になります。ではこの式 (12) の分母をはらってみましょう。

$$v^2-v_0^2=2ax \qquad (13)$$

という式が出てきます。これは結局式 (9) と (10) から t を消去した式なので、t がわからない状態で v や v_0、a や x のどれか 3 つが解っているときに、t を求めなくても使える式として、わざわざここで出していますが、結局「力学的エネルギー保存則」を習うとそれと同じことなので、わざわざ覚えるのもなぁ…と思います。

物理を公式でどうにかしようというのは無理なお話です。問題を解くときには現象を把握し、それを自分で式にしなくてはなりません。だから難しいと言われるのでしょうが、逆にどうしてその公式が出てきたのかというのを覚えておくと、それを使う理由もわかるので、すぐに問題が解けるようになります。一緒に頑張っていきましょうね！

ということで現時点ではとりあえず式 (13) も大事だということにしておいて

$$
\begin{gathered}
v=v_0+at \\
x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\
v^2-v_0^2=2ax
\end{gathered}
$$

は覚えておいてください。あぁっと、意味の確認をするのを忘れていました。$v=v_0+at$ は、加速度さえなければ速度 v は v_0 のままであったことを意味します。加速度があると、加速度とは「1 秒間にどれだけ速度が変化するか」という値ですから、t 秒間で変化する量は当然 at[m/s] になります。ですから結局加速度 a があると、$v=v_0+at$ となります。

さらに、$x=v_0t+at^2/2$ ですが、これは図 25 でお伝えしたので大丈夫でしょう。加速度がなかったら $x=v_0t$ になりますが、加速度があるせいで余計な三角形の部分の面積だけ進んでしまうので、それを加えて $x=v_0t+at^2/2$ となります。

3 つ目の式は先ほども言いましたように、ただ上 2 式から t を消去しただけです。これらの使い方は後々問題演習のページを作るかも…知れません。まぁ、皆さんの要求次第です。