

目次

2.16	仕事	2
2.16.1	力を加えたけど...	2
2.16.2	仕事という考え方	6
2.16.3	仕事とは	8
2.16.4	仕事をされたかチェック!	10
2.16.5	仕事の正負とは	12
2.16.6	仕事はベクトル量?	15
2.17	仕事に関する値	19
2.17.1	前後のパラメータ	21
2.17.2	仕事と等価なもの	21
2.18	エネルギーとは	21
2.18.1	位置エネルギーとは	21
2.18.2	運動エネルギーとは	21
2.19	力学的エネルギー保存則とは	21
2.19.1	力学的エネルギー保存則の適用条件	21
2.19.2	保存力とは	21
2.19.3	保存力が働く場におけるエネルギー保存のイメージ	21
2.19.4	より吟味した位置エネルギー	21
2.20	バネに蓄えられるエネルギー	21
2.20.1	バネに働く力	21
2.20.2	バネに蓄えられるエネルギー	21
2.21	バネも含めた力学的エネルギー保存則	22
2.22	仕事とエネルギーの関係	22
2.22.1	摩擦力の仕事	22
2.22.2	仕事とエネルギーの関係	22
2.23	問題演習	22

2.16 仕事

普段から「仕事」という言葉はよく使いますね。「お父さんの仕事は…」なんていう感じで。しかし物理における仕事はこの仕事とはちょっと違います。ただそんなに難しいものではありません。イメージさえつかめてしまえばすぐに理解できるものです。

では、実際の定義に入る前にちょっとイメージをつかんでもらいましょう。

2.16.1 力を加えたけど…

あるアルバイトがあります。その仕事内容は「 $3[\text{N}]$ の力で箱を押すだけ」という簡単な内容でした。

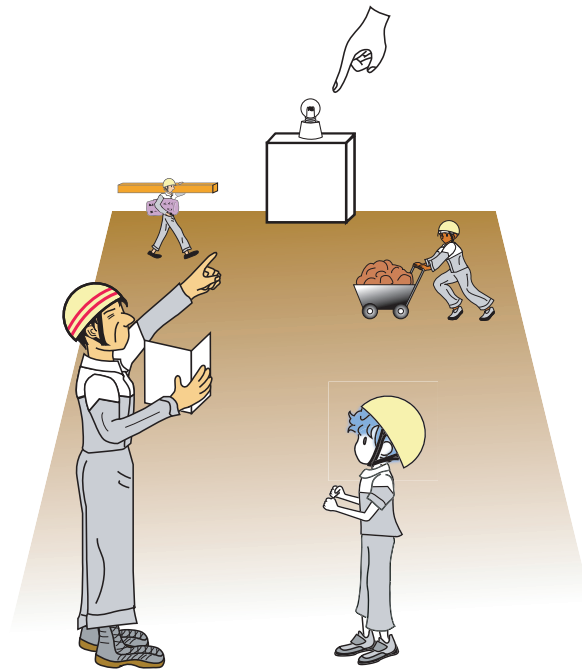


図 1: 親方に仕事内容を聞く

さっそく申し込みました。さて、親方から仕事内容を聞きます。

親方：「あそこにある箱に $3[\text{N}]$ の力を加えて、押してきてもらえるかい？」

少年：「押すだけでいいの？」

親方：「そう押すだけだよ。押すと上のランプが点くから、ちゃんと $3[\text{N}]$ の力が加わったかはすぐにわかるよ。 $3[\text{N}]$ 以上の力を加えてもランプは当然点くよ。」

少年：「うん！じゃあやってくる！」

少年：タッタッタッタッタッ…

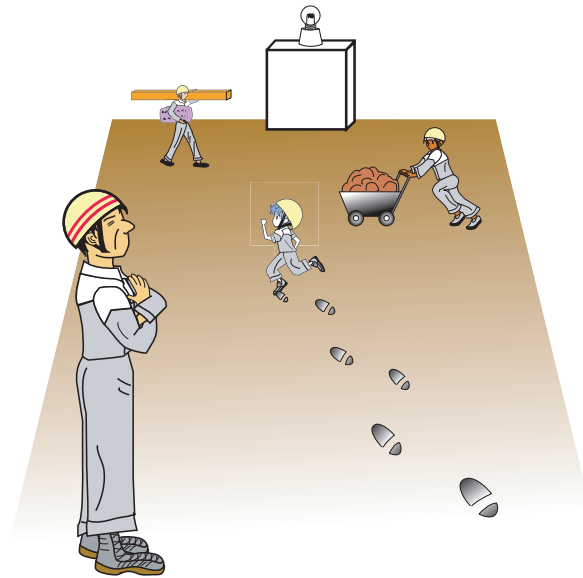


図 2: さっそく出発！

少年：「ん～っ！」
ランプ：「ピコン！」
少年：「あっ、点いた！」

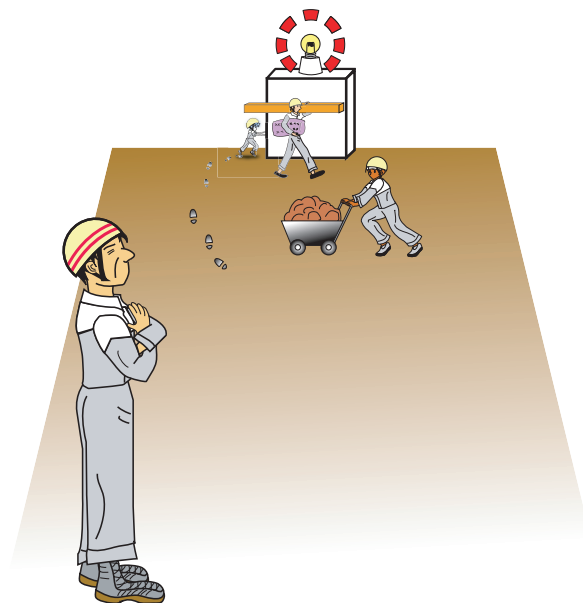


図 3: グッと押してランプがピコン！

少年：タッタッタッタッタッ…

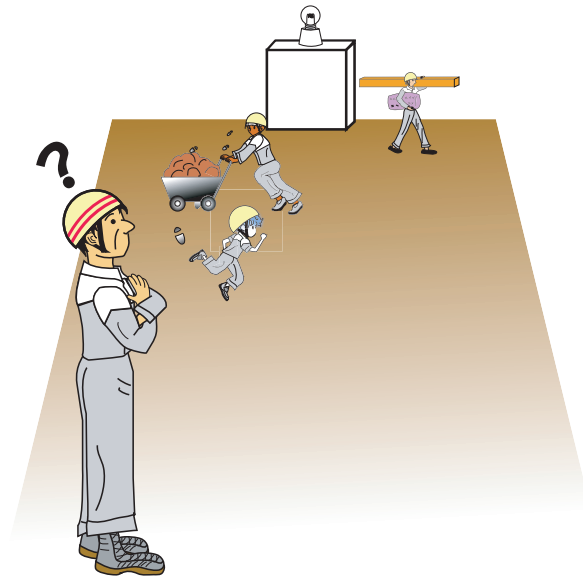


図 4: さっそく帰還！

少年：「終わりました！」

親方：「……………」

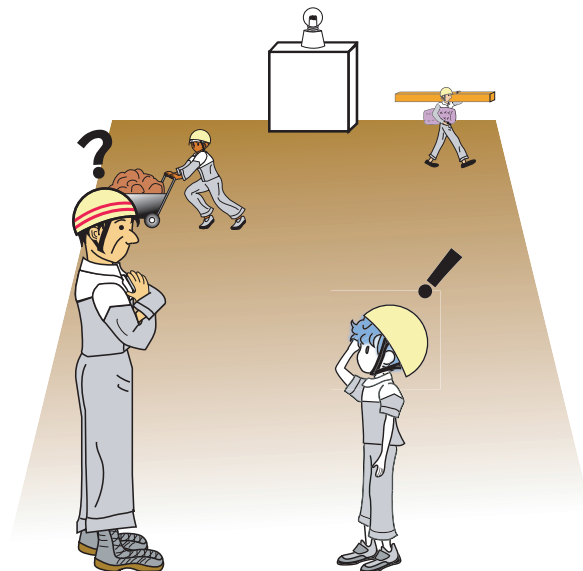


図 5: 帰還して敬礼！

親方：「確かに…私は $3[N]$ の力を加えて、ランプを点けてこいとは言ったが…これじゃあバイト代は…」

さて、皆さんはこのお話の問題点はもうお気づきですよね？親方は確かに「箱に $3[N]$ の力を加えて押してきてくれ」と頼んでいましたが、 $3[N]$ の力を一体**どれだけ**加えればいいのかをうっかり説明し忘れていたのでした。この**どれだけ**をどう扱うかが問題なわけです。

たとえばこの**どれだけ**を $3[N]$ の力で**どれだけ動かしたか**と考えることも出来ますし、また、 $3[N]$ の力を**どれだけの時間かけ続けたのか**と考えることも出来ます。

物体に力を加えたとき

- その力でどれだけの距離動かしたのか。
 - その力をどれだけの時間加えたのか。
- という異なった2つの見方が存在する。

さて、うっかりものの親方はアルバイトの給料を決めるために次の選択肢を考えつきました。

出来高制

1つ目は物体を動かした距離で給料を決める方法。ランプは3[N]以上の力を加えると点灯するから、可能な限り動かせば動かすほどバイト代ははずむよ〜♪

バイト代は3[N]と動かした距離 x [m] をかけたもので決定しよう！つまり「力×距離」だね。今回は力はずっと3[N]と決めるけど…。でも、この支払い方法だと、物体が重過ぎて全く動かなかったらたとえランプが点いても距離 x は0だから、バイト代は0だけだね。

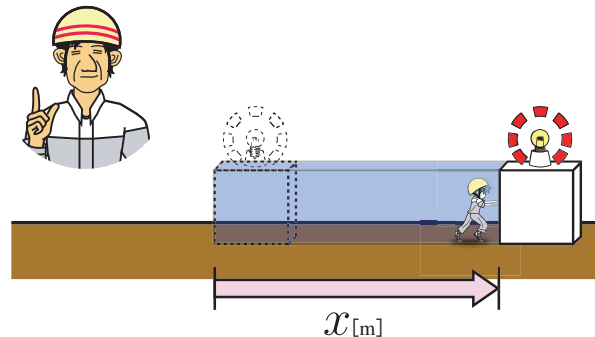


図 6: 出来高制

時給制

もう1つは物体を動かした時間で給料を決める方法だ。ランプは3[N]以上の力を加えると点灯するから、どれだけの時間点灯させてたかでバイト代を出すよ。(このときどれだけ距離を動かしたかは全く関係ないよ。)

バイト代は物体にかけた力3[N]と点灯させた時間 t [s] をかけたもので決定しよう！つまり「力×時間」だね。今回は力はずっと3[N]と決めるけど…。でも、この支払い方法だと、物体が重過ぎて全く動かなくても時間 t は発生するから、バイト代は0にはならないね。

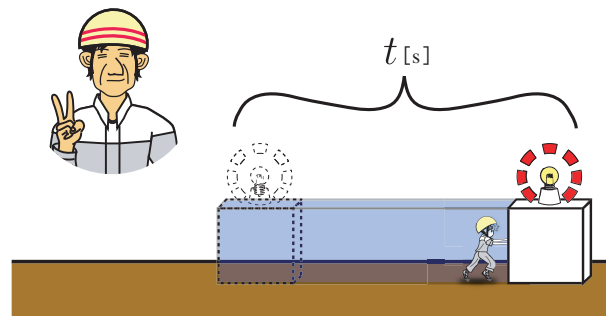


図 7: 時給制

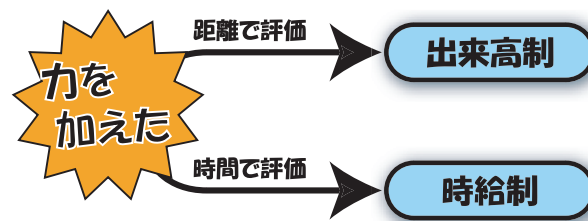


図 8: 評価方法

つまり「力を加えた」と言ってもそれだけじゃバイト代をいくら出すか？というような評価を下すことが出来なかったわけです。だから図 8 のように、その力を加えた距離で評価する「出来高制」にするか、加えた時間で評価する「時給制」にするかという評価方法が生まれるわけです。

これと同じような考え方が物理にも登場します。

2.16.2 仕事という考え方

さきほどと同じ話を考えてみましょう。

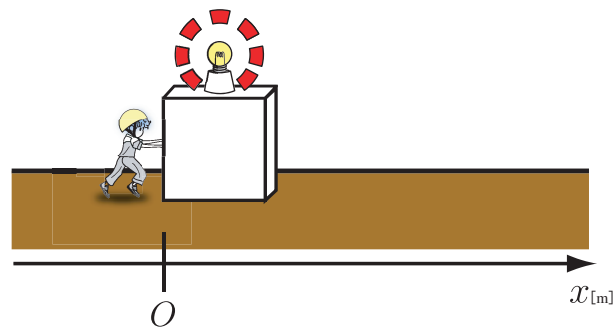


図 9: 物体を押す

図 9 の男の子は、ただ物体を押しているだけです。力が作用していることを示すランプが光っていますね。ただ、これだけでは「力が作用した結果何が起こったのか？」が説明できません。では図 10 だと説明できるでしょうか？

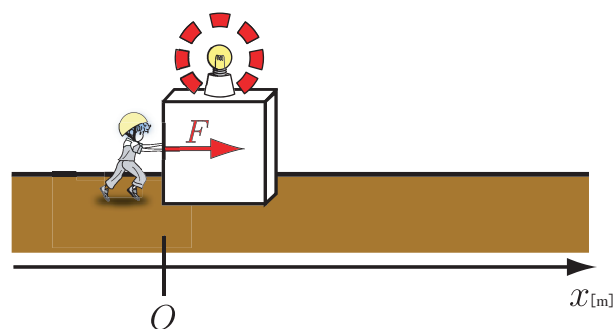


図 10: 力を書き込む

図 10 は男の子が $F[\text{N}]$ の力で物体を押していることが示されています。（このとき物体の鉛直方向にかかる垂直抗力や重力は見難くなるので省略してあります。）しかし、力が加わったことが分かっただけで、結局これでは「力が作用した結果何が起こったのか？」は示せませんね。つまり「力が作用した結果何が起こったのか？」を示すためには、「どれくらい」力が加わったのかを示すことが必要なわけです。そこでさっきのお話を思い出してみましょう。

物体に力 $F[\text{N}]$ を加えて動かしたとき、「動かした距離」で評価する方法と「動かした時間」で評価する方法の2つがありました。

仕事

加えた力を、その力を加えて動かした距離で評価すると、その力は物体に仕事をしたという評価になります。

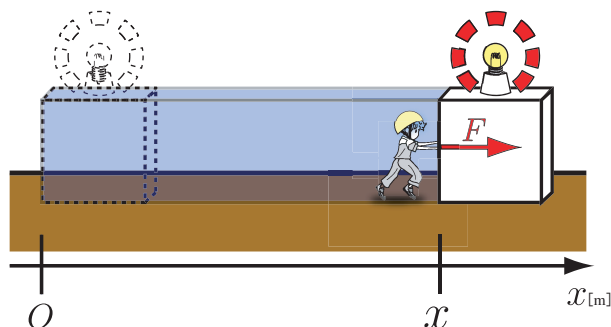


図 11: 仕事をするという考え方

図 11 のように物体に一定の外力（男の子が押す力） $F[\text{N}]$ を加えて距離 $x[\text{m}]$ だけ移動させたとき、外力は物体に $Fx[\text{J}]$ の仕事をしたと定義します。つまり仕事 W は

$$W = Fx [\text{J}] \quad (1)$$

と表せます。

もう少しイメージしやすく表現をしておくと、「男の子が物体に仕事 $Fx[\text{J}]$ を加えたと親方が評価している」という感じです。つまり力 $F[\text{N}]$ を加えたとだけしか伝えられないと評価しにくいですが、**どれだけの距離動かしたのか**という情報までもらえるとこのように「仕事」として評価できるというわけです。（ここで言う仕事とは当然実世界の仕事とはちょっと違いますよ。）

力積

図 11 と全く同じ運動でも違う見方で評価することが出来ます。もう皆さんはお分かりですよ。

物体に力 $F[\text{N}]$ を加えて動かしたとき、加えた力を、その力を加えた時間で評価すると、その力は物体に **力積** りきせき **を加えた**という評価になります。

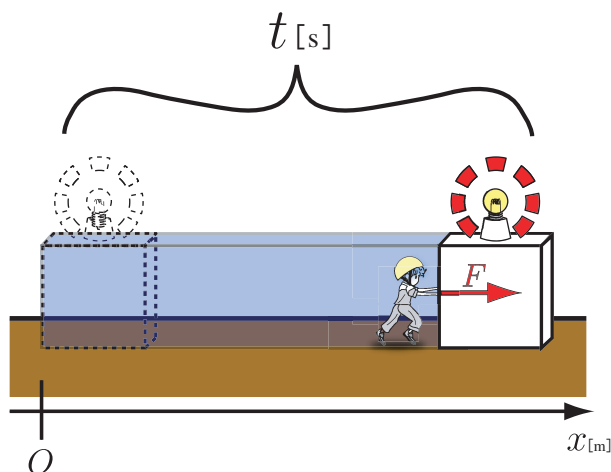


図 12: 力積を加えるという考え方

図 12 のように物体に一定の外力（男の子が押す力） $F[\text{N}]$ を時間 $t[\text{s}]$ だけ加え続けたとき、外力は物体に $F \cdot t [\text{N} \cdot \text{s}]$ の力積を加えたと定義します。

$$\text{力積} = F \cdot t [\text{N} \cdot \text{s}] \quad (2)$$

一般的には加える時間をほんの一瞬の $\Delta t[\text{s}]$ として、力積を $F \Delta t [\text{N} \cdot \text{s}]$ と表したりします。力がほんの一瞬だけ働く…つまり衝撃力を表す値のようなものですね。

ここで仕事と同じようにもう少しイメージしやすく表現をしておくと、「男の子が物体に力積 $F \cdot t [\text{N} \cdot \text{s}]$ を与えたと親方が評価している」という感じです。つまり力 $F[\text{N}]$ を加えたとだけしか伝えられないと評価しにくいですが、**どれだけの時間、力を加えたのか**という情報までもらえるとこのように「力積」として評価できるというわけです。

動詞の使い分けがちょっと面倒なんですけど、仕事は「する・される・加える・加えられる」が、力積は「加える・与える」といった感じの動詞が私はしっくりくる気がします。しかしこれは人によって様々ですので、自分のイメージに合う動詞を選んでください。

まとめますと、

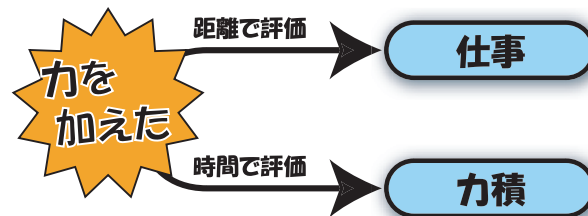


図 13: 評価方法

つまり「**力を加えた**」と言ってもそれだけじゃその力の効果を計ることができないわけです。ですから、図 13 のように、その力を加えた距離で「仕事」として評価したり、加えた時間で「力積」として評価したりという2つの評価方法が生まれたわけですね。次に、その「**評価**」を物理の中でどのように利用するのかを説明します。（力積は力学Ⅱの分野で説明します。）

2.16.3 仕事とは

さて、ここまでは物体に力が働いたときに、その力の効果を一体どのように評価したらよいかということをイメージも含めて説明してきました。ここからは、「**仕事**」にさらに注目して話を進めていきます。

まず仕事の定義をしておきます。

物体に外力 $F[\text{N}]$ が加わって、距離 $x[\text{m}]$ だけ動いたとき、その物体には仕事 $Fx[\text{J}]$ が加わったと定義する。

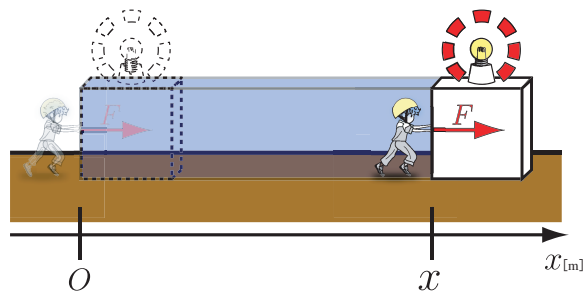


図 14: 仕事が行った運動

図 14 では、男の子が物体を力 $F[\text{N}]$ で軸の正方向へ押しています。その結果物体が距離 $x[\text{m}]$ だけ移動しましたね。この移動最中、男の子はずっと同じ力 $F[\text{N}]$ で押し続けていました。このとき、定義から男の子は物体に $Fx[\text{J}]$ の仕事をしたことになります。

<?? 仕事が行くと物体には一体どういう現象が起こったのでしょうか??>

Ans. 仕事を加えると、物体が動きます（正確には止まっている物体が動いたり、動いている物体が止まったりします）。当たり前に見えるかも知れませんが、これが一番大事なことです。力を加えただけでは物体が動くかどうかは分かりません。しかし物体が外力により仕事をされると**必ず物体の運動が変化します**。ここで言う、「物体の運動の変化」とは「**物体の加速度の変化**」のことを指します。つまり「加速度が変化する→速度が変化する→物体の運動状態が変化する」というわけなのです。

逆に見てみましょうか。「加速度」とは「**1 秒間あたりの速度変化**」で、「物体の加速度が変化する」ということは「その物体の速度が変化する」ということ、「速度」は「**1 秒間あたりに物体がどれだけ移動するか**」を表していますから、物体が動いたことを意味しています。これを上では「物体の運動状態が変化する」と表現しました。さらに加速度が変化した理由は「力が加わったから」。これは運動方程式のところでやりましたね。ですから、「**力が働いて物体が移動した**」ということはつまり「物体は仕事をされた」ということになるのです。

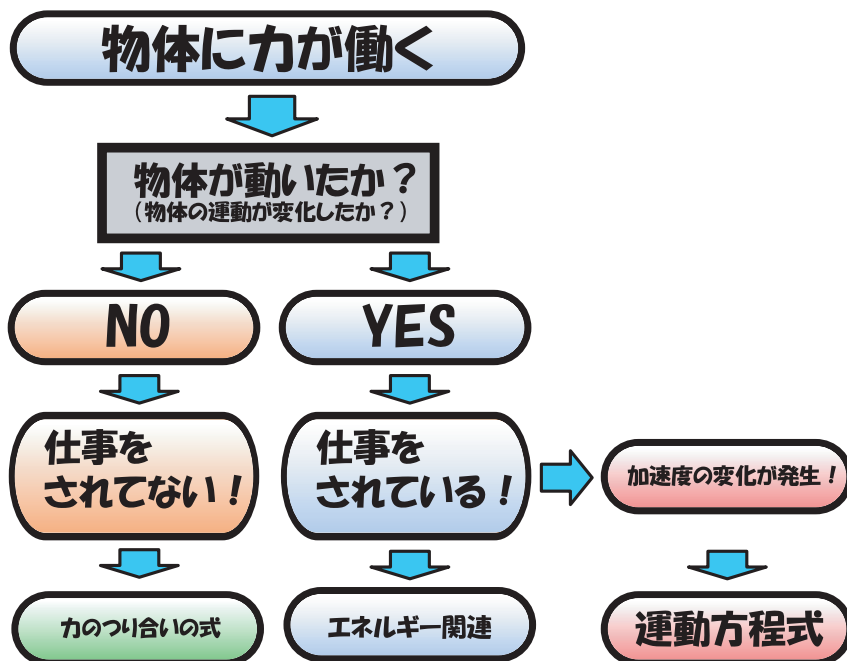


図 15: 物体に力が働くとき

物体に力が働いたときの考えるべき「流れ」を図 15 に示します。まだモーメントの部分を加えていませんが、とりあえずここでは、これまでの部分のまとめとしてこれだけ挙げておきます。

仕事に関するイメージをまとめますと、

物体が仕事をされると、運動状態が変化する。

ということになります。男の子（外力）から仕事をされたよ〜！というイメージを加えたものを図 16 に描いておきます。

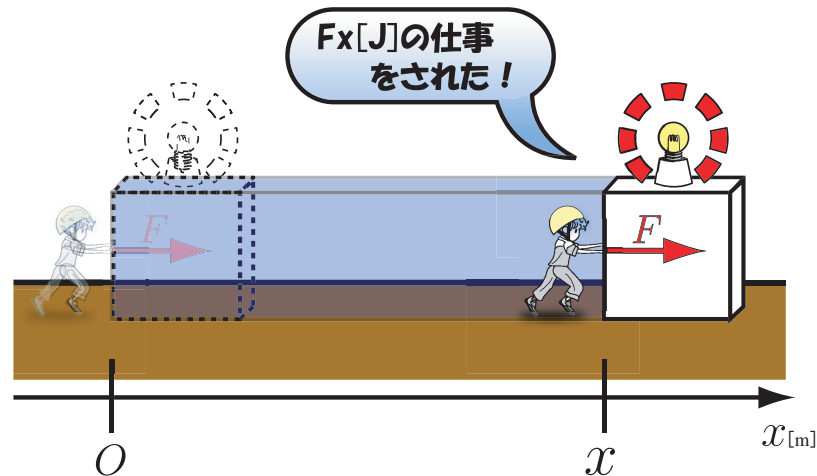


図 16: 物体がされた仕事

最後に仕事の単位について触れておきます。仕事 W が加えられた力 $F[\text{N}]$ と移動した距離 $x[\text{m}]$ の積として Fx と表されるのはもうずっと言ってきたのでお分かりだと思います。その単位をいきなり $[\text{J}]$ と書いていましたが、実際は当然 $[\text{N}\cdot\text{m}]$ でも良いわけです。つまり $[\text{J}]$ と $[\text{N}\cdot\text{m}]$ には

$$[\text{J}] = [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (3)$$

という関係が成立します。これは単位から物事を考える上でとても重要になってきますので、しっかりと同じものだということを認識し、自分で書けるようにしておいてください。いつか役に立ちます。

2.16.4 仕事をされたかチェック！

では、ここで物体に仕事をされたかどうかを皆さん自身に判断してもらいます。とても簡単ですよ。さあやってみましょう！

以下のそれぞれの図 17～20 において、上段の状態の物体 m に何かしらの動作が行われたり行われなかったりして（中段）、下段の物体 m の状態になりました。ではそれぞれの図において、その？の部分で物体は仕事をされたか答えなさい。
（ただし、もし仕事をするために外力を加えるとしたら、一方向のみから一度だけ加えるものとします）

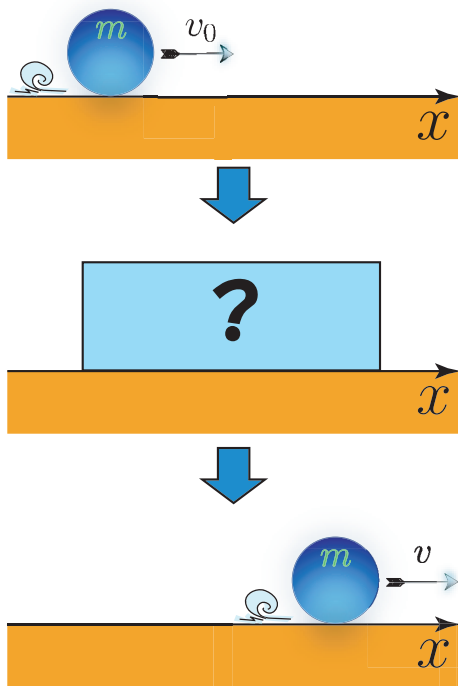


図 17: 仕事をされた？

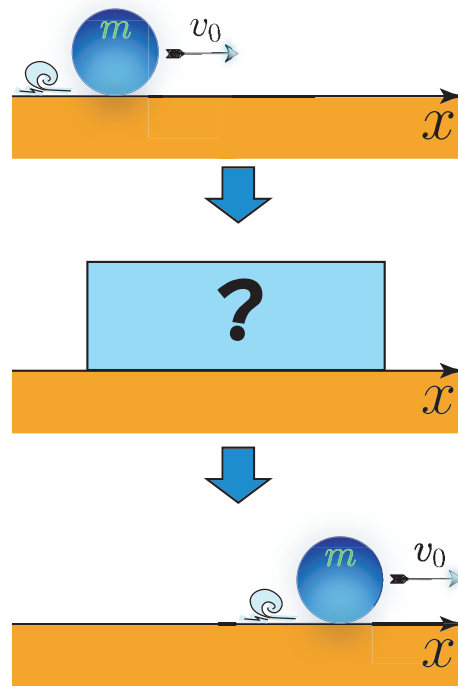


図 18: 仕事をされた？

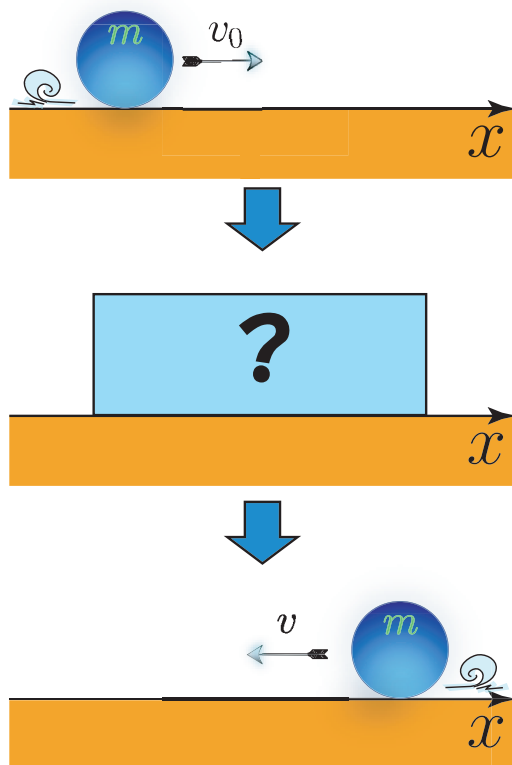


図 19: 仕事をされた？

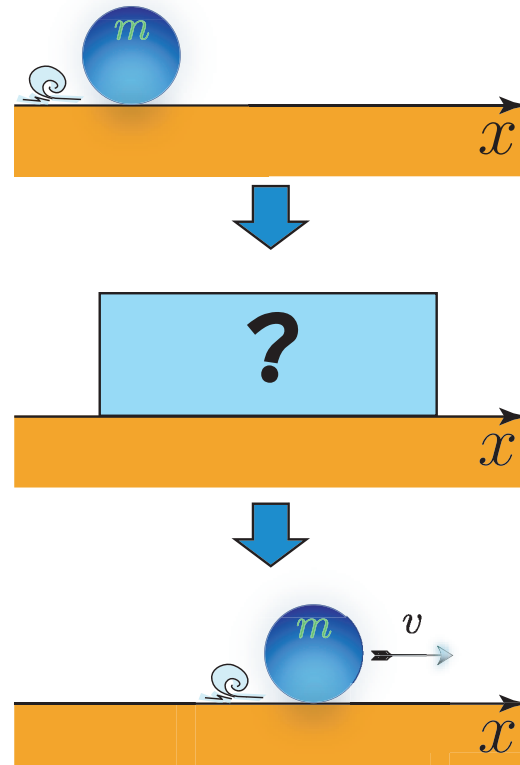


図 20: 仕事をされた？

Ans.

仕事をされたかどうかは、「物体の運動状態が変化したかどうかを確認すればよい」のでしたね。ということで順に順に見ていきましょう。

図 17 は物体の速度が v_0 から v に変化しています。つまり「速度変化が起こった」ということは「加速度が生じていた」ということになります。当然「加速度が生じていた」ということは「力が発生していた」ということ。力が発生していて、物体が移動しているのだから当然「仕事をされた」ということになりますね。この論理展開（話の道筋を正しく追うこと）が出来れば最高ですが、まずは「運動状態が v_0 から v に変化している」ということに気付けたかどうか重要です。それさえ気付けていたら、正解です。

図 18 は？ボックスの前後で速度が変化していません。「運動状態が変化していない」ということは仕事はされていません。

図 19 は速度変化が起こっています。ですから物体 m は仕事をされていますね。当然仕事をした外力は x 軸負方向へ力を加えました。

図 20 でも止まっている（速度 0）の状態から速度 v まで変化しています。つまり外力が働いたということであり、仕事をされたということがわかりますね。

どうだったでしょう？仕事をされたかされてないかは簡単に判断することができたのではないのでしょうか？実際にとても簡単です。もしできてなかったのなら、もう一度見直してみてください。どこに注目すればよいか、そしてどうしてそこに注目するのがわかると物理はとても簡単で、そして楽々と問題を解くことが出来るようになります。

2.16.5 仕事の正負とは

仕事の正負はどのように決まっているのか考えてみましょう。

仕事が物体に加えた力と移動距離の積 $Fx[\text{J}]$ だということはイメージしてもらえたと思います。ではその正負はどのように決まっているのでしょうか？ここで次のような状態を考えてください。

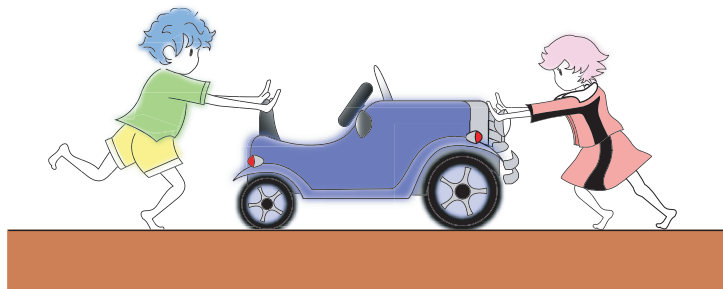


図 21: 仕事の正負

お兄ちゃんと妹が遊んだ車を片付けようとしています。お兄ちゃんが進ませようとしている方向が正しいのですが、妹がいたずらして邪魔をしています。このときお兄ちゃんと妹は車にどのような力を加えているのでしょうか？

仕事をしない

2人が車を押す**力の大きさが等しい**と、車はどちらにも動きません。そのときの様子は図 22 のようになります。

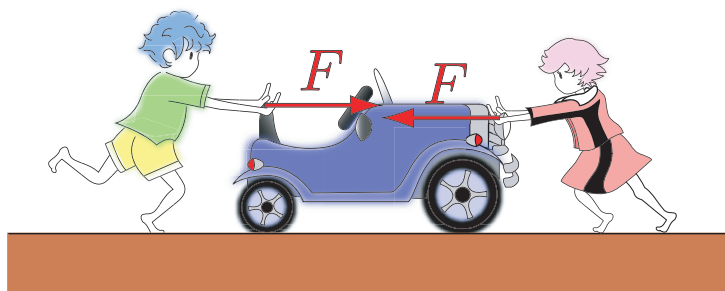


図 22: 2 人の力が等しいとき

さてこのとき 2 人とも力は加えていますが、その力を加えている対象である車は全く動きませんから、仕事はしていないことになりますね。つまり「**力を加えても物体が動かなければ仕事はしていない**」わけです。

仕事を加える

そうこうしていると、お兄ちゃんも怒ってちょっと力を入れたようです。お兄ちゃんの押している方向へ車が動き始めました。

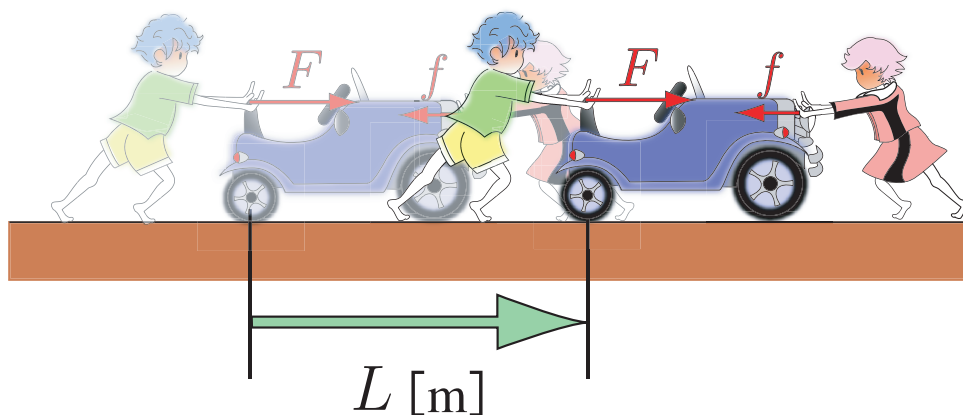


図 23: お兄ちゃんの方が力が強いとき

このときお兄ちゃんが車にした仕事 W_b はどのようなになるのでしょうか？もちろん今までしっかりとイメージを構築してきた皆さんなら問題ないでしょう。力 $F[\text{N}]$ で距離 $L[\text{m}]$ 移動させたわけですから、

$$W_b = F \cdot L [\text{J}] \quad (4)$$

となります。ここで問題なのは妹が車にした仕事 W_s です。「えっ!?妹って車に仕事しているの?」と思っている方もいらっしゃるかも知れません。が、**もちろん妹も車に仕事を加えています**。

仕事の定義を思い出してください。「物体に力 $F[\text{N}]$ を加えて距離 $x[\text{m}]$ だけ動かしたとき、その力 $F[\text{N}]$ は物体に仕事 $F \cdot x[\text{J}]$ を与えた」でしたね。妹は車に力 $f[\text{N}]$ を加えています。そして車が移動してしまったので、移動距離も発生しています。だったら仕事は当然生じます。

しかし、妹が加えた仕事はお兄ちゃんが加えた仕事とは少々違います。さて何が違うのでしょうか？車の移動方向と、車に加えている力の方向をよく確認してみてください。

お兄ちゃんが加えている力の方向と車の移動方向は同じですが、妹が加えている力の方向は、車の移動方向と逆方向を向いています。つまり、お兄ちゃんは車を動かすために仕事を加えたのですが、妹は車の動きを邪魔するために仕事を加えたわけです。確認するところはただ一つ「移動方向と力を加えた向き」です。

この妹がした仕事のように、「物体の運動方向と逆方向に加えた力が物体にする仕事」を負の仕事と定義します。移動方向と力の方向が逆ですので、移動方向を正にとって

$$W_s = -f \cdot L \text{ [J]} \quad (5)$$

となります。つまりお兄ちゃんが車にした仕事は正の仕事 $F \cdot L$ [J] で、妹が車にした仕事は邪魔する仕事 $-f \cdot L$ [J] ですから、トータルで車がされた仕事 W_{total} は

$$\begin{aligned} W_{total} &= F \cdot L - f \cdot L \\ &= (F - f) \cdot L \text{ [J]} \end{aligned} \quad (6)$$

となります。この式 (6) で表されている内容を別の角度から見てみましょう。

ではもう一度しっかりと図 23 を見てください。

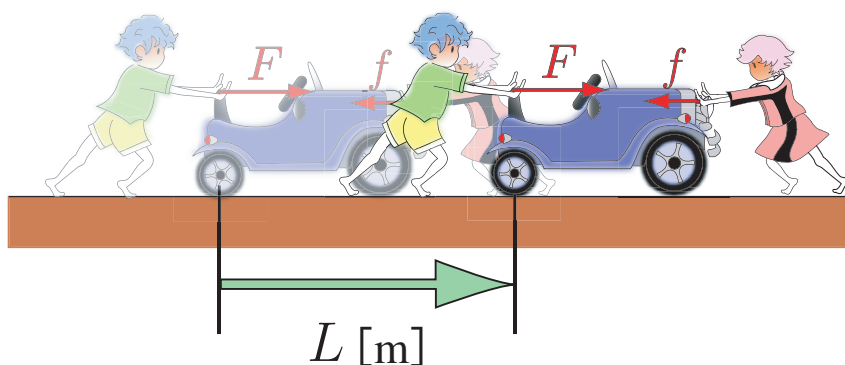


図 23: 再度図 23 を表示

車に働く力はお兄ちゃんの力 F [N] と妹の逆方向の力 f [N] があります。ですから、車に働く力の合力は当然右方向へ $F - f$ [N] となりますね。では図 24 にお兄ちゃんと妹が出す力の合力を示し、合成した結果、妹を取り除いた状態図を図 24 に示します。

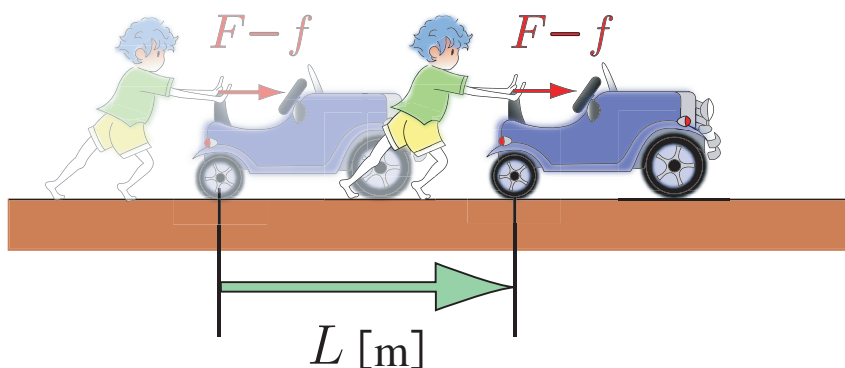


図 24: お兄ちゃんと妹の力の合成

つまり、仕事を出す前に合力を出してしまうと、結局お兄ちゃんが2人の力の差分 $\Delta F = F - f$ [N] で進行方向へ距離 L [m] だけ移動させていると考えることが出来るので、このときの仕事を $W_{f\text{total}}$ とすると

$$W_{f\text{total}} = (F - f) \cdot L \quad [\text{J}] \quad (7)$$

となり、結局式 (6) と式 (7) は同じことを言っていると分かります。

したがって、車がされた仕事を考えるときは「**車に加わるそれぞれの力がした仕事の合計**」と考えてもいいですし、「**車に加わる力の合力がした仕事**」と考えてもいいわけです。この結果から逆に、お兄ちゃんだけだったら $F \cdot L$ [J] の仕事が出来たはずなのに、妹が仕事をした結果、トータルの仕事が $(F - f) \cdot L$ [J] になっているわけですから、妹が車にした仕事は負の仕事で $-f \cdot L$ [J] であることがわかってもらえたと思います。

結論

物体の運動方向に加えた力がした仕事は正
運動方向と逆に加えた力がした仕事は負
力を加えてもその方向へ全く動かなければ仕事は0

2.16.6 仕事はベクトル量？

さてここまで読んでこられた皆さんはかなり仕事に対するイメージが出来上がってきた頃だと思います。そこでこの小節では、仕事がベクトル量なのかスカラー量なのかを考えていきましょう。

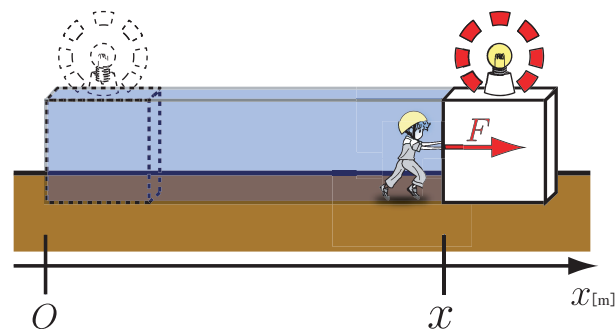


図 25: 仕事をする

図 25 のように物体に力を加えたとき物体が移動したら、その力は物体に仕事をしたと言うのでした。そして、その移動方向へ加えた力がした仕事が正、逆に移動方向と逆方向へ加えた力がした仕事は負でしたね。そう考えると、仕事はベクトル量ではないかと考える人もたくさんいると思います。

しかし結論から言いますと、仕事は**スカラー量**です。

仕事はスカラー量

では何故スカラー量なのか考えてみましょう。まず仕事がどのように表されていたのかをもう一度確認してみますと、 $W = F \cdot x$ [J] でしたね。仕事を表す $F \cdot x$ のうち、力は当然ベクトル量です。では x はどうでしょう？

前の小節でも述べましたように、仕事には力を加えた方向とそして物体が移動した方向が重要なのでした。この「物体が移動した方向」という言葉からもわかるように、実は x は単なる距離ではなく、その移動方向とそしてその大きさを持つベクトル量として定義されています。つまり本当は仕事は

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} \quad (8)$$

と定義されているわけです。これを図で見てみましょう。

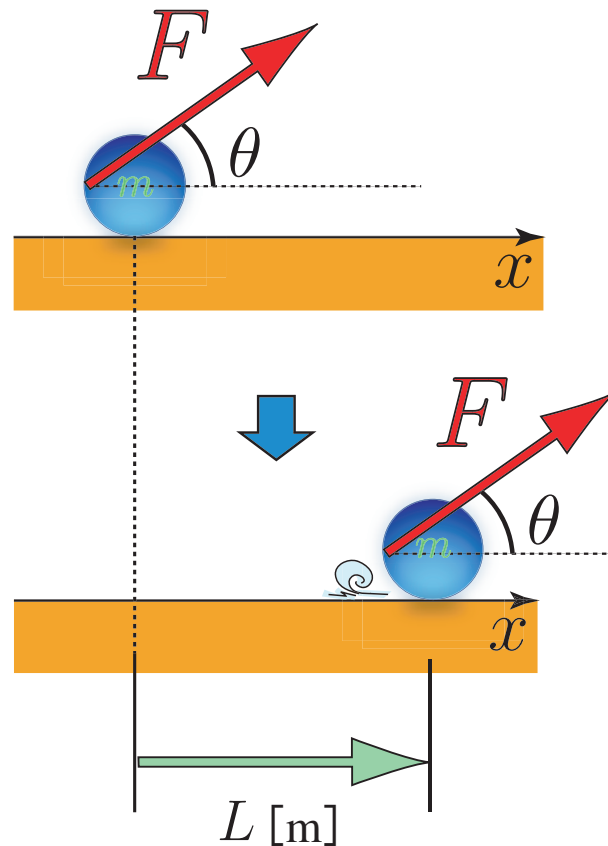


図 26: 物体 m に力を加える

物体 m に対して、水平方向と角度 θ [rad] をなす方向へ力 F [N] を加えて、 x 軸正方向へ距離 x [m] 移動させます。このとき、図 26 を見ておわりの通り、鉛直方向へは $F \sin \theta$ と重力や垂直抗力との力のつり合いにより動かないものとします。

では、物体を動かすのに効果を発揮した力 F [N] の成分はいくらでしょうか？

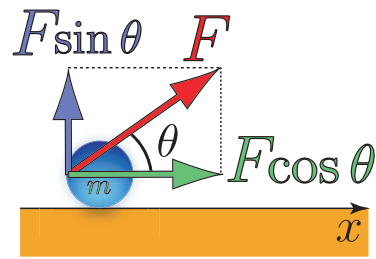


図 27: 物体に加わる力を分解

図 27 では物体に加わっていた力 $F[\text{N}]$ を水平方向と鉛直方向へ分解してみました。このうち明らかに物体を x 軸方向へ移動させ、物体に対して仕事をした力 $F[\text{N}]$ の成分は水平方向の $F \cos \theta[\text{N}]$ であることがわかりますね。

つまり図 26 の状態において、力 $F[\text{N}]$ が物体にした仕事は

$$W = FL \cos \theta \quad [\text{J}] \quad (9)$$

と表されるわけです。ここで、この $FL \cos \theta$ は $\vec{F}$ と $\vec{x}$ の内積であることに気付くでしょうか？内積に関して詳しく述べるのはここでは避けますが、内積は一方のベクトルと、そのベクトルへもう一方のベクトルの影を落とした正射影ベクトルとの積で定義されています。つまり

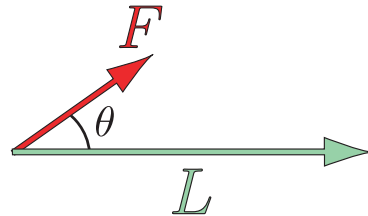


図 28: ベクトルの内積のイメージ

図 28 で表される $\vec{F}$ と $\vec{L}$ の内積は、例えば図 29 のように $\vec{L}$ に向かって下ろした $\vec{F}$ の影による正射影ベクトル $F \cos \theta$ と、 $\vec{L}$ の積として表されます。

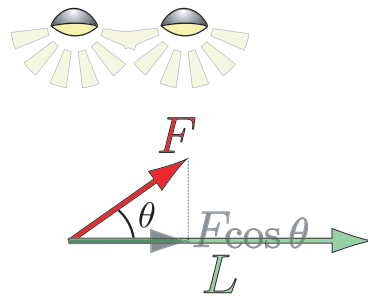


図 29: 正射影ベクトルとの積

ベクトル同士の内積はご存知のように大きさの掛け算となり、その結果方向を表すデータが失われスカラー量となります。

$$\begin{aligned} W &= \vec{L} \cdot \vec{F} \\ &= |\vec{L}| |\vec{F}| \cos \theta \\ &= FL \cos \theta \end{aligned} \quad (10)$$

結局、ベクトル同士の内積だから、お互いに持ってた方向の情報が失われてスカラー量になるよ！とただそれが伝えたかっただけなんです。

では仕事をベクトルの内積とイメージできるように、もう一度具体的な運動を考えて、それをベクトルの内積と関連付けてみましょう。

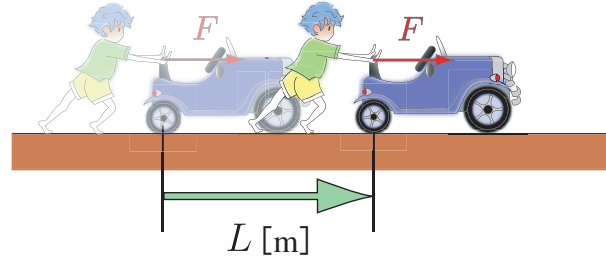


図 30: 力の方向と移動を表す変位ベクトルの方向が同じ

このようにお兄ちゃんが車を押す力のベクトルと、車の移動する変位ベクトルの方向が一致しています。この場合のベクトルだけの関係を取り出してみると図 31 のようになります。単純に同じ方向に向いている図 31 のような場合だと、それぞれのベクトル $\vec{F}$ や $\vec{L}$ が同じ方向を向いているので、互いのなす角 θ が 0 ということで、

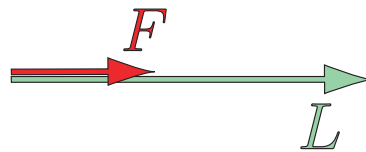


図 31: 互いに同じ方向を向いているベクトル同士の内積

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{L} \\ &= |\vec{F}| |\vec{L}| \cos 0 \\ &= FL \end{aligned} \tag{11}$$

となり、仕事 W が前の小節までで学んだ力と距離の積 $FL[\text{J}]$ で表されます。

逆に

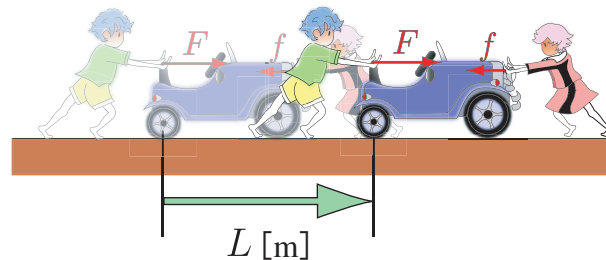


図 32: 力の方向と移動を表す変位ベクトルの方向が反対方向

図 32 の妹のように、移動方向を示す変位ベクトルと、車に加える力のベクトルの方向が逆を向いている場合は、図 33 のようにそれぞれのベクトル $\vec{f}$ と $\vec{L}$ が互いに逆方向を向いていますので、互いのベクトルのなす角 θ は π となり $\cos \pi = -1$ ですから

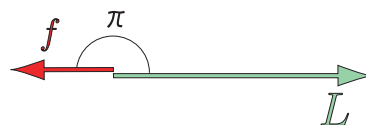


図 33: 互いに逆方向を向いているベクトル同士の内積

$$\begin{aligned}
 W &= \vec{f} \cdot \vec{L} \\
 &= |\vec{f}| |\vec{L}| \cos \pi \\
 &= -fL
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

となります。これは、物体の進行方向を表す変位ベクトル $\vec{L}$ の方向と逆方向へ力 $\vec{f}$ を加えると、仕事 W が負になるということを正しく表せていますね。

結論

仕事は、物体に加えられた力のベクトルと物体が移動した方向を示す変位ベクトルとの内積により定義されており、内積の定義から、求められる値はスカラー量となる。

2.17 仕事に関する値

ここからは、物体が外力から仕事をされたとき、その前後で変化したパラメーターと仕事の間関係を見ていくことにします。

では次の図 34 を見てください。

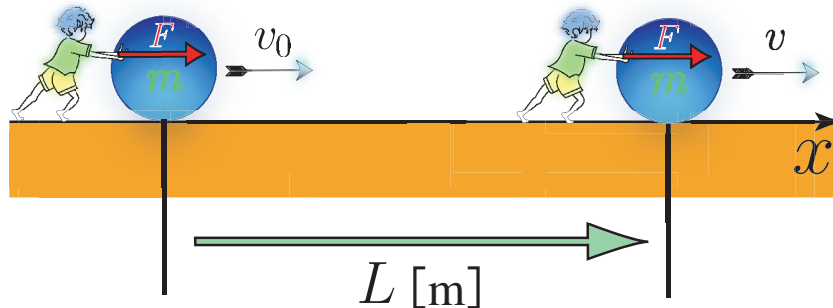


図 34: 物体 m に仕事をする

もう段々慣れていく頃だと思いますが、男の子が物体 m に力 $F[\text{N}]$ を加え続けて、距離 $L[\text{m}]$ だけ動かしています。この移動中はずっと同じ力を加え続けていますから結構大変です。だってどんどん物体の移動速度が上がりますから…。

それはそれとして、この運動において、男の子は物体に仕事をしていますよね。恐らくこの辺までしっかり読んでこられた方は既に疑問にすら思わないのではないのでしょうか？では、その仕事をされた物体には一体どのような変化が起こったのでしょうか？

お気付きかも知れませんが、実はこの話も既に登場していますね。そう「仕事とは」という小節でやりましたね。物体は仕事をされると運動状態が変化するのでした。もう一度復習してみましょう。運動状態が変

化する…とは、力が加わり物体が移動することで、加速度が生じ、その加速度によって速度が変化するというお話でした。

つまり「物体が仕事をされた結果、速度が変化した」わけです。これって式で表せないでしょうか？最初の速度が $v_0[\text{m/s}]$ 、された仕事が $FL[\text{J}]$ 、最終的な速度が $v[\text{m/s}]$ ですから、それぞれの関係を考えて…

$$v_0 + FL = v \quad (13)$$

としたいところですが、この式(13)には致命的な欠点があるわけです。単位でも次元でもいいですが…単位を見てみましょうか。速度の単位は $[\text{m/s}]$ です。しかし仕事の単位は $[\text{J}]$ 、これは書き換えても $[\text{N}\cdot\text{m}]=[\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$ となりますが、決して等しくはありません。つまりこれだと単位が等しくないで、等式が立てられないわけです。

しかし、仕事をされた前後で速度が変わったことに違いはありません。きっと速度に関係はあるはずです。では、仕事をされた前後で「仕事と等式が立てられる速度に関係のある値」とは一体何なのでしょうか？

これを求めるには実際には高校物理では扱ってはならない積分を使わなくてはなりません。この積分を使った求め方については、この小節の一番最後に示しておきます。とりあえず違ったアプローチをかけてみましょう。

仕事の単位を見てみます。先ほど示した変換をもう一度最初からやります。まず仕事の単位は $[\text{J}]$ ですね。これは仕事が「力×距離」で表されることから分かるように $[\text{N}\cdot\text{m}]$ と同値です。さて、ここで運動方程式を思い出してもらいましょう。

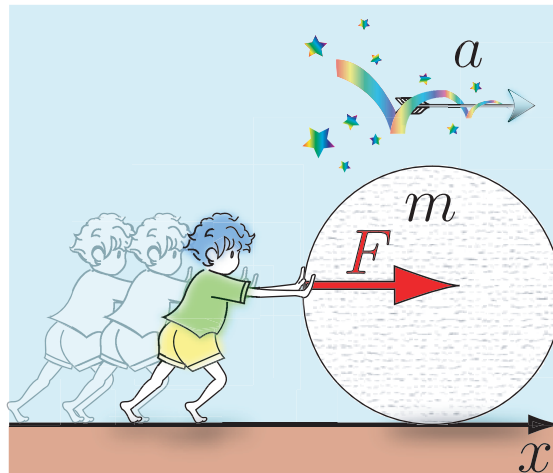


図 35: 物体 m に力 F を加えて加速度 a が生じたとき

このとき次の式(14)の式が成立するのです。

$$ma = F \quad (14)$$
$$[\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2] \quad [\text{N}]$$

この左右の単位は互いに等しいので先ほどの $[\text{N}\cdot\text{m}]$ 中の N は $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ と置き換えられます。結果、 $[\text{N}\cdot\text{m}]$ は $[\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$ となるわけです。つまり $[\text{J}] = [\text{N}\cdot\text{m}] = [\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$ というわけです。この最後の単位をもう少し変形しますと、 $[\text{kg}\cdot(\text{m/s})^2]$ と書けます。これって質量と速度の二乗の積ですね。

ですから仕事の単位は「質量と速度の二乗の積 (mv^2)」と等しいわけです。あとは積分をしなければ正しく出せませんが、 mv^2 の前に係数 $\frac{1}{2}$ が付きまして、図 34 の状態で成り立つ仕事の式とは（図 34 は再表示）

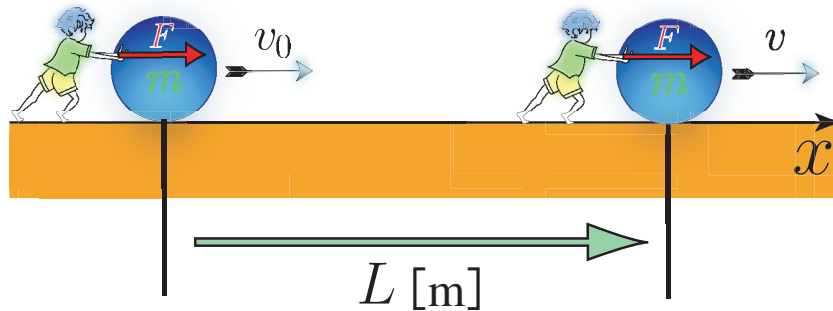


図 34: 仕事と等価なもの

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + F \cdot L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (15)$$

となります。あとからも出てきますが、 $\frac{1}{2}mv_0^2$ や $\frac{1}{2}mv^2$ のことを「**運動エネルギー**」といいます。

2.17.1 前後のパラメータ

単純に速度？

2.17.2 仕事と等価なもの

2.18 エネルギーとは

2.18.1 位置エネルギーとは

2.18.2 運動エネルギーとは

2.19 力学的エネルギー保存則とは

2.19.1 力学的エネルギー保存則の適用条件

2.19.2 保存力とは

2.19.3 保存力が働く場におけるエネルギー保存のイメージ

2.19.4 より吟味した位置エネルギー

位置エネルギーの基準を変えることによりどのようにエネルギーが扱われるのかを考える。

2.20 バネに蓄えられるエネルギー

2.20.1 バネに働く力

軸を一定に固定して、 $f=kx$ ではなく $f=-kx$ で定義する。

2.20.2 バネに蓄えられるエネルギー

まずは一定の力が働いたときになされる仕事の図から。

2.21 バネも含めた力学的エネルギー保存則

2.22 仕事とエネルギーの関係

2.22.1 摩擦力の仕事

2.22.2 仕事とエネルギーの関係

一般にはエネルギー保存則という。

2.23 問題演習